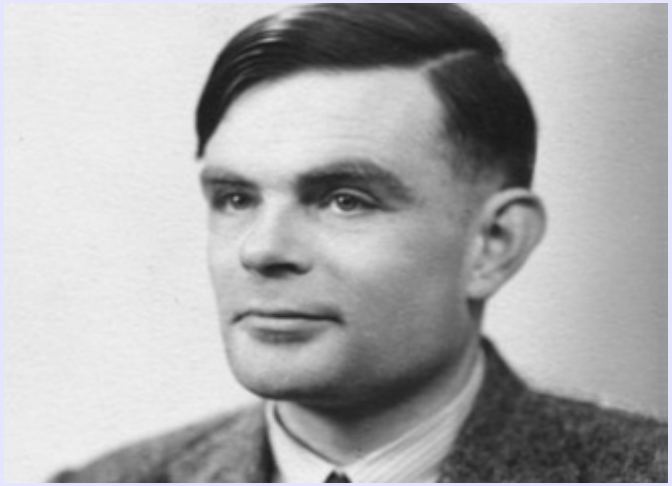
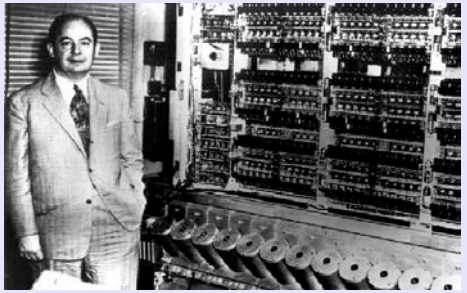




Information, Calcul et Communication

Module 1 : Calcul

Leçon I.2 : Qu'est-ce qu'un algorithmes ?

J.-C. Chappelier, J. Sam (slides) & R. Guerraoui (livre chap1)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Objectifs de la leçon

Dans la leçon précédente, nous avons vu comment représenter les éléments d'un problème sous forme de **données** de différents *types* (nombres entiers, nombres à virgule flottante, caractères alphanumériques, etc…).

Une question est maintenant de savoir comment ***traiter*** / ***manipuler*** toutes ces **données**.

☞ C'est tout l'objet du **calcul** informatique.

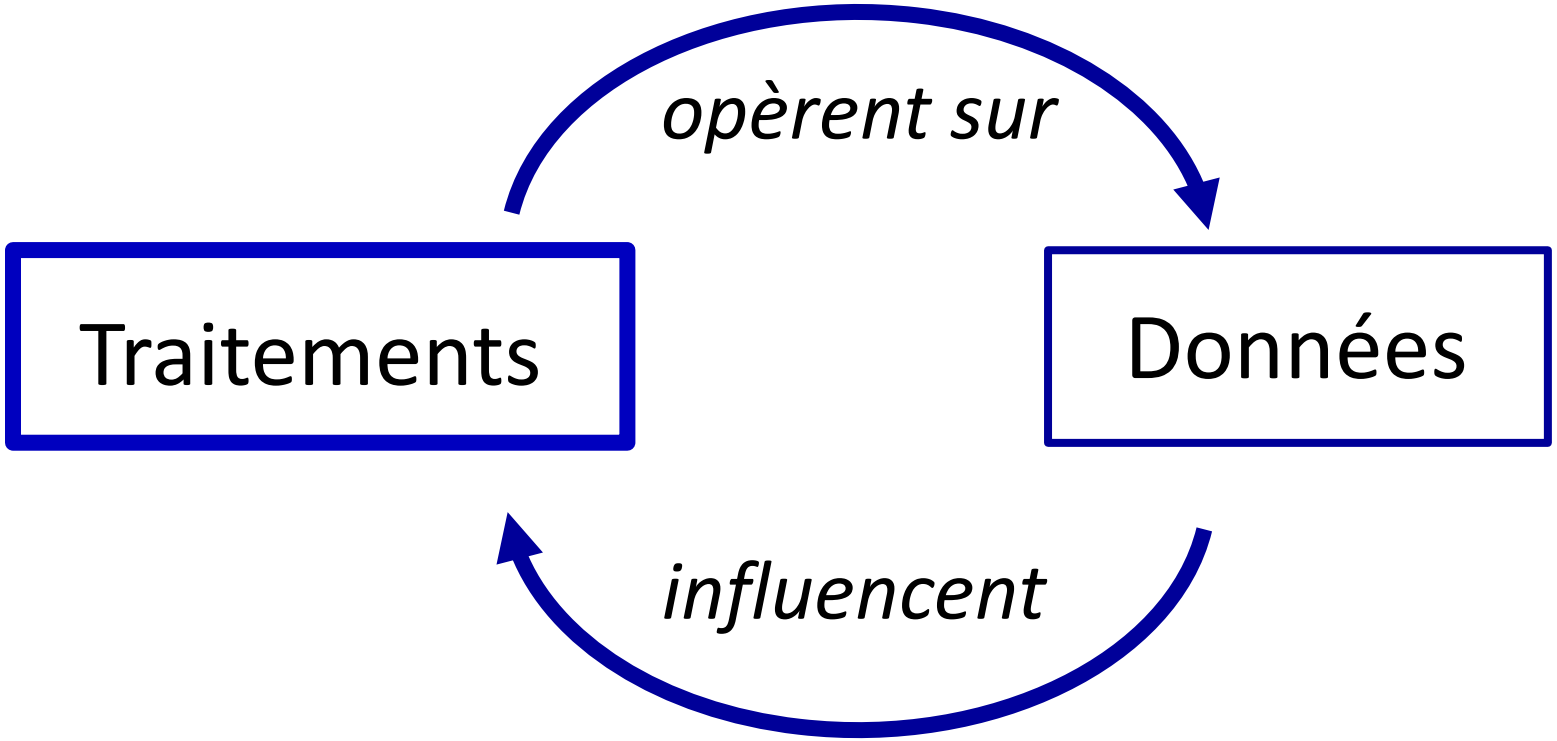
Les objectifs de cette leçon sont de :

- Formaliser ces calculs : notion ***d'algorithme***
- Présenter les «***composants***» des algorithmes
- Les illustrer sur la résolutions de quelques problèmes simples en partie inspirés par le cours précédent

Plan

- Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- Illustrations sur quelques d'algorithmes

Pour automatiser une **tâche** il faut pouvoir la **décomposer** sous la forme d'une **séquence d'instructions** (**traitements**) et de **données** adaptées à l'automate utilisé (ordinateur).



Aujourd'hui l'accent est mis sur les **traitements** à l'aide **d'expressions** et **d'instructions de contrôle** exprimées en **pseudocode**

Formalisation de l'Informatique

Formalisation des **traitements** : **algorithmes**

- ☞ distinguer formellement les bonnes séquences de traitements des mauvaises

Formalisation des (ensembles de) **données** : **structures de données abstraites**

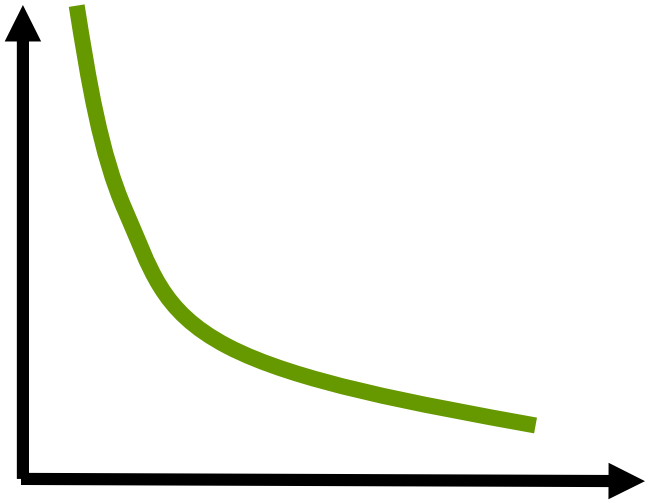
- ☞ Distinguer formellement les bonnes structuration des données des mauvaises. Cependant cet aspect est peu développé dans ce cours.

☞ Nous travaillerons essentiellement avec la notion de **liste** qui est un ***ensemble de données de taille connue N***. On accède à un élément de la liste **L** à l'aide d'un *numéro de 1 à N*, appelé *indice*. Dans nos exemples d'algorithmes on utilise les notations **L(i)** ou **L[i]** pour désigner le $i^{ième}$ élément de la liste L.

La **conception** consiste à choisir les bons algorithmes et bonnes structures de données pour résoudre un problème

Compromis fréquent entre *le **coût calcul*** de l'algorithme et le ***coût mémoire*** de la structure de donnée

Coût calcul de l'algorithme = nb d'opérations pour obtenir le résultat



Coût mémoire de la structure de donnée
= espace mémoire nécessaire
pour les données fournies en input,
le résultat *ET les calculs intermédiaires*

Idéalement, si la mémoire était infinie et facile d'accès, de nombreux problèmes pourraient se mettre sous forme d'une table qu'il suffirait de consulter pour chaque combinaison des paramètres du problème fourni en entrée.

Algorithme ≠ Programme

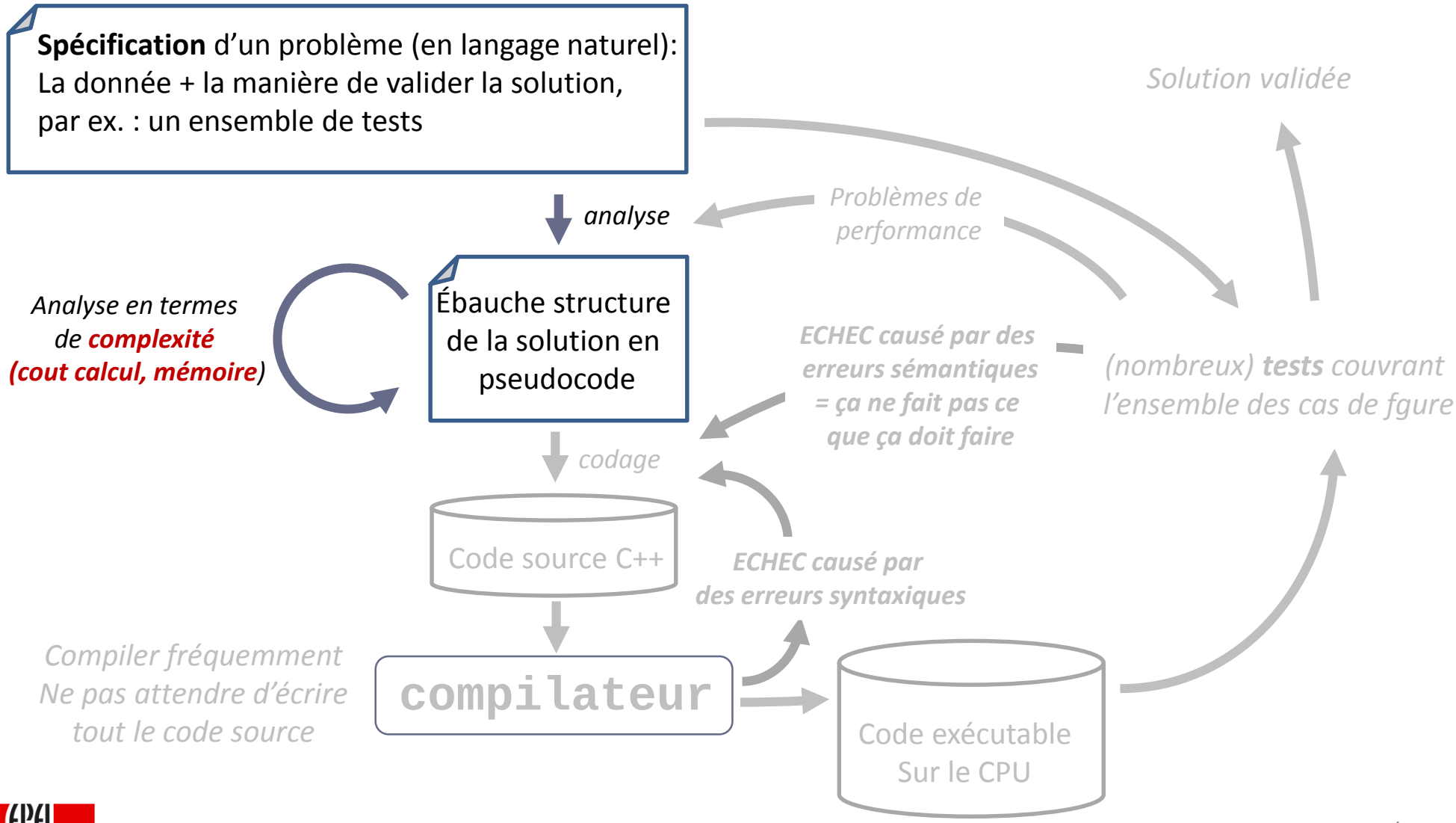
Un algorithme est **indépendant du langage de programmation** dans lequel on va l'exprimer **et de l'ordinateur** utilisé pour le faire tourner.

C'est une description *abstraite* des étapes conduisant à la solution d'un problème.

algorithme = partie conceptuelle d'un programme (indépendante du langage)

programme = implémentation (réalisation) de l'**algorithme**, dans un langage de programmation et sur un système particulier.

Rappel: cycle de développement



Qu'est ce qu'un algorithme ?

Algorithme ?

☞ moyen pour un humain de représenter (pour un autre humain ou une machine) la résolution par calcul d'un **problème**

Les algorithmes existent depuis bien avant les ordinateurs : déjà dans l'Antiquité (e.g. *division égyptienne*, *algorithme d'Euclide du PGCD*)

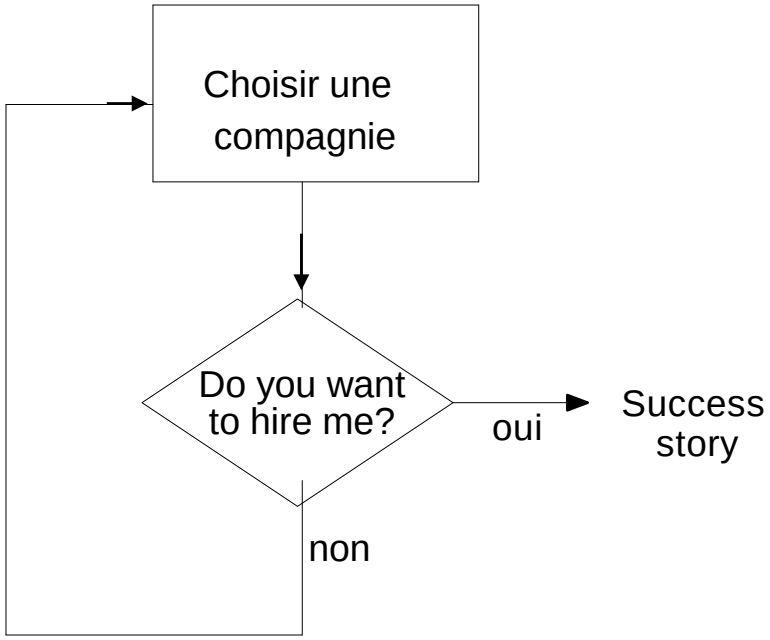
Origine du nom : mathématicien persan Al-Khawarizmi du 9e siècle, surnommé « le père de l'algèbre ».

Algorithmes : introduction

☞ algorithme(s) / données ?..

Algorithmes : introduction

« Do you want to hire me ? » : premier algorithme :

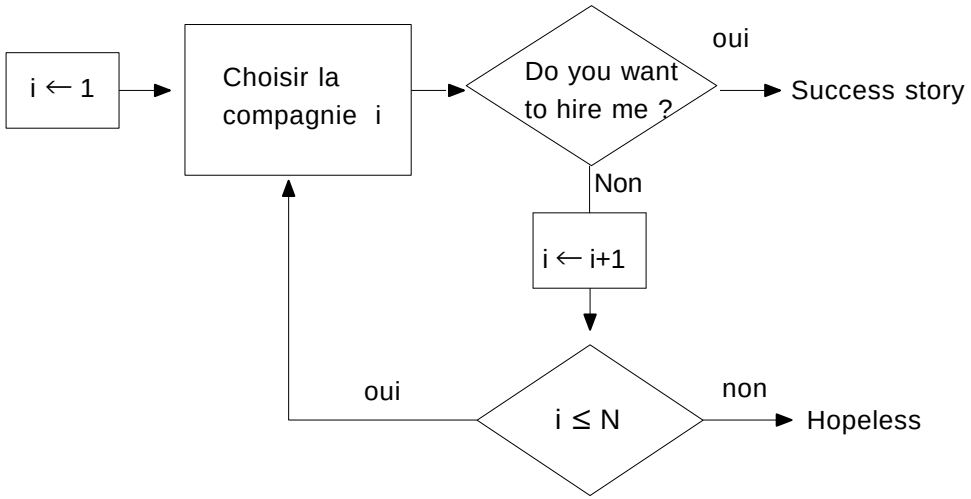


Données :
- Une personne cherchant un stage
- Ensemble de *N* compagnies

☞ Il n'est pas garanti que l'algorithme puisse se terminer !

Algorithmes : introduction

«Do you want to hire me ? » : deuxième algorithme :



Données :
- Une personne cherchant un stage
- Ensemble ***ordonné*** de *N* compagnies

- les données sont *structurées ;* chaque compagnie a un numéro entre 1 et N
  ☞ lien algorithme / représentation des données
- l'algorithme se **termine** nécessairement (au pire *N* essais successifs)
- mais il n'est pas garanti qu'il soit le plus *efficace* possible !

Qu'est ce qu'un algorithme ?

Algorithme :

composition d'un ensemble fini d'opérations élémentaires bien définies (déterministes)

opérant sur un nombre fini de données

et effectuant un traitement bien défini :

- suite finie de règles à appliquer,
- dans un ordre déterminé,
- si possible, se terminant (i.e. arriver, en un nombre fini d'étapes, à un résultat, et cela quelles que soient les données traitées).

Plan

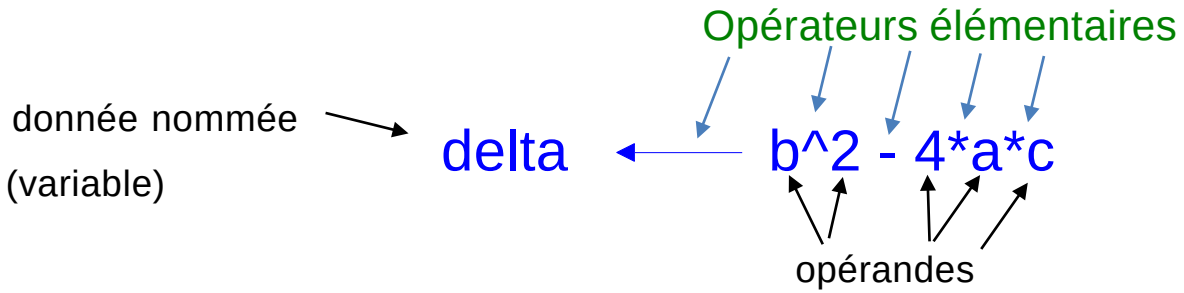
- Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- Illustrations sur quelques d'algorithmes

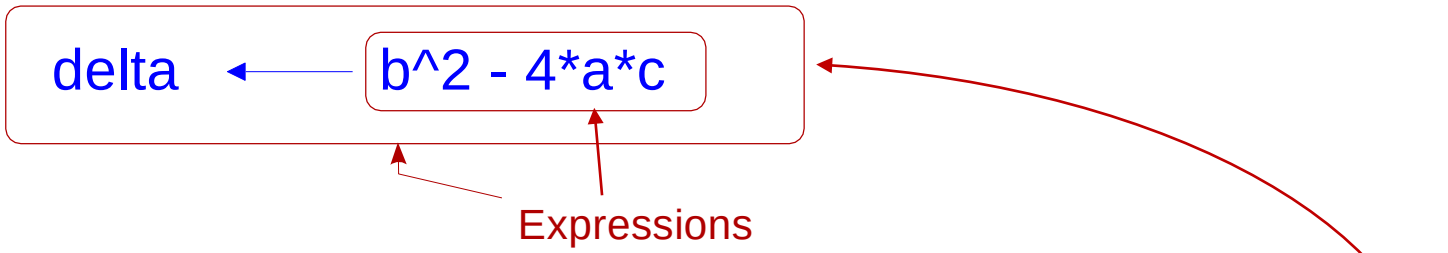
Terminologie

Un algorithme travaille sur des données qu'il utilise et/ou modifie.

☞ il doit **mémoriser** ces données, en les associant à un *nom* / *identificateur* pertinent pour pouvoir les retrouver au moment où elles lui sont nécessaires.

Une donnée nommée est ce que l'on appelle une ***variable*** dans un algorithme.





Les **traitements** combinent une ou plusieurs **opérations** dans des **expressions**

L' **expression** correspondant à un pas de l'algorithme est appelée une **instruction**

Instruction (non-) élémentaire

Une ***instruction élémentaire*** est une instruction dont le coût d'exécution est **constant** (ne dépend pas de la donnée que l'on manipule).

Exemples :

- ***instruction élémentaire d'affectation***: associer une donnée de base (comme un nombre) à un nom (variable)

delta ⟵ b^2 - 4*a*c

- ***instruction non élémentaire*** : compter le nombre de caractères contenus dans une phrase (dépend de la longueur de la phrase).

Structures de contrôle

Pour pouvoir exprimer des traitements intéressants/complexes, un algorithme ne peut se réduire à une séquence linéaire d'instructions.

☞ **structures de contrôle**

Une structure de contrôle sert à **modifier l'ordre séquentiel d'exécution** d'un programme (elle peut produire un *branchement* sur une instruction qui n'est pas celle qui suit dans l'algorithme)

☞ faire exécuter à la machine des tâches de façon *répétitive*, ou *en fonction de certaines conditions* (ou les deux).

Les 4 différentes structures de contrôle

On distingue 4 types de structures de contrôle :

1) la sortie = fin de l'algorithme: ***Sortir : résultat (optionnel)***

La sortie *implicite* d'un algorithme est à la fin de la suite d'instructions.

Il est possible d'insérer une instruction de sortie de l'algorithme *explicitement* dans la suite d'instructions.

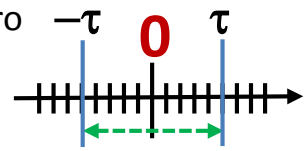
La sortie *peut produire un résultat* mais ça n'est pas obligatoire.

L'instruction de sortie doit être associée à une condition sinon l'arrêt de l'algorithme est inconditionnel et ce qui suit n'est jamais exécuté…

Il faut donc l'associer à l'une des 3 autres structures de contrôle qui permettent de mettre en œuvre une action conditionnelle

Les 4 différentes structures de contrôle (2)

note: on suppose que $\Delta \geq 0$ dans ces exemples ; de plus on teste une tolérance τ plutôt que la valeur brute zéro



2) les branchements conditionnels : *Si ... alors ... Sinon ...*

Si $|\Delta| < \tau$ ***Alors***

$$x \leftarrow \frac{-b}{2a}$$

afficher x

Sinon

$$x_1 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

afficher x_1 et x_2

Le mot-clef ***Si*** est suivi d'une expression de type «**condition**» dont la valeur ne peut être que Vrai ou Faux (booléen)

variante avec l'instruction de sortie ; le mot-clef Sinon devient inutile

Si $|\Delta| < \tau$ ***Alors***

$$x \leftarrow \frac{-b}{2a}$$

afficher x

Sortir

$$x_1 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

afficher x_1 et x_2

Les 4 différentes structures de contrôle (3)

3) les boucles conditionnelles :

Tant que ... , ***Répéter ... Tant que...***

```
Tant que temperature < 18
    [ chauffer la maison
      pendant 1  heure ]
```

```
Répéter
    afficher la question
    lire la réponse
Tant que   la réponse est incorrecte
```

Le mot-clef ***Tant que*** est suivi d'une expression de type «**condition**» dont la valeur ne peut être que Vrai ou Faux (booléen)

4) les itérations : ***Pour ... allant de ... à ...***

$$x = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$$

```
x ← 0
Pour i de 1 à 5
    x ← x + 1/i²
```

On peut toujours faire des **itérations** en utilisant des **boucles conditionnelles**:

$$x = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$$

$x \leftarrow 0$
Pour i de 1 à 5
  $x \leftarrow x + \frac{1}{i^2}$

$x \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
Tant que $i \leq 5$
  $x \leftarrow x + \frac{1}{i^2}$
  $i \leftarrow i + 1$

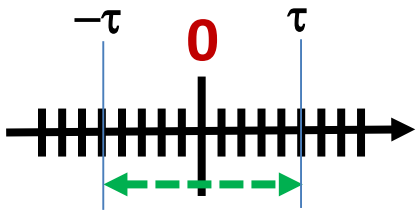
Premier exemple concret

On veut écrire l'algorithme permettant de résoudre (dans $\mathbb{R}$) une équation du second degré de type :

$$x^2 + b\,x + c = 0$$

Pour a =1, b et c fixés, les solutions réelles d'une telle équation sont :

$$\begin{cases} \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}\ ,\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} & \text{si } \Delta > \tau \\ \dfrac{-b}{2} & \text{si } |\Delta| \le \tau \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$



avec $\Delta = b^2 - 4\,c$

Conception de l'algorithme ?

- ☞ Cas simple (déjà bien formalisé au départ)
- ☞ La détermination de la tolérance τ dépend de la représentation des réels
- ☞ la conception peut devenir (très) complexe (prochaines leçons)

Premier exemple concret : Formalisation des traitements

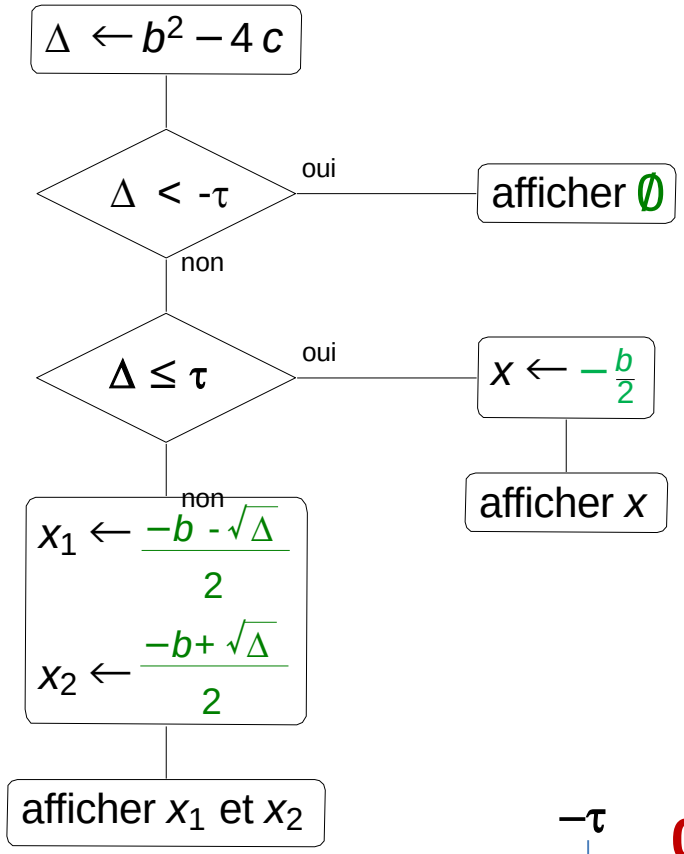
☞ **Algorithme** :

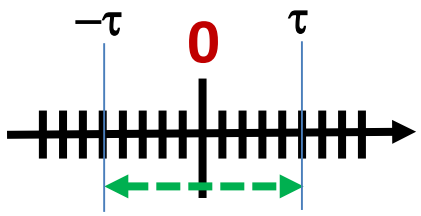
Second degré

entrée : b, c

sortie : $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + b\,x + c = 0\}$

$\Delta \leftarrow b^2 - 4\,c$
Si $\Delta < -\tau$
  afficher $\emptyset$
Sinon
  Si $\Delta \leq \tau$
    $x \leftarrow -\frac{b}{2}$
    afficher x
  Sinon
    $x_1 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}$
    $x_2 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$
    afficher x_1 *et* x_2





Algorithmes : conclusion

On attend d'un algorithme qu'il se termine, produise le résultat correct (propriété de sûreté) *pour toute entrée*.

Difficulté de l'Informatique (science) : assurer que l'algorithme est correct *pour toute entrée*.

On ne peut pas vérifier par des essais (empirisme) : on ne pourra jamais tester tous les cas

☞ vérification par preuves mathématiques

Importance d'un travail soigneux et mûrement réfléchi !

Plan

- Formaliser ces calculs : notion d'algorithme
- Présenter les « ingrédients de base » des algorithmes
- Illustrations sur quelques d'algorithmes
  - Conversion représentation en virgule fixe vers décimal
  - Conversion base dix vers le binaire (nb entier)
  - Conversion base dix vers le binaire ($0 \leq nb < 1$)
  - Conversion représentation simple en virgule flottante vers décimal
  - Conversion base dix vers représentation simple en virgule flottante
  - Détermination si un nombre est premier

Ex : Conversion virgule fixe vers décimal

Donnée : Convertir un nombre binaire en virgule fixe représenté par une liste **P** de 32 valeurs binaires dont **nf** sont dédiés à la partie fractionnaire.

Le premier élément de la liste **P(1)** est le poids de la puissance $\mathbf{2^{-nf}}$. Pour chaque élément suivant de la liste P, on augmente la puissance de la base de une unité.

Conversion_entier_bin2dec

entrée : *nb de bits en partie fractionnaire* ***nf***
liste P de 32 valeurs 0 ou 1

sortie : *valeur représentée X*

```
X ← 0
Pour i de 1 à 32
    X ← X + P(i) * 2^((i-1) – nf)

Sortir X
```

Ex2: Conversion d'un nombre entier décimal vers le binaire

Donnée : Convertir un entier positif décimal n en binaire jusqu'à un maximum de 32 bits. La conversion consiste à effectuer la division entière par la base 2 tant que le quotient est supérieur ou égal à la base. A chaque étape, ***le reste*** *de la division entière* fournit le *poids d'une puissance de la base* en commençant par le poids faible. On obtient ce *reste* avec L'opérateur **mod** .

Question: L'affichage immédiat des poids donne-t-il le bon résultat ?
Réponse: Non car le nombre binaire apparaît «à l'envers». On doit ranger chaque poids binaire dans un élément d'une liste **P** de 32 éléments binaires tel le poids de la puissance i-1 de 2 est mémorisé dans l'élément P(i) de la liste P.

Dans une seconde étape on affiche les éléments mémorisés dans P en commençant par les poids fort.

Conversion_entier_dec2bin

entrée : *n, entier naturel*
P, liste de 32 valeurs 0 ou 1
sortie : *aucune car l'algo affiche la valeur binaire de n ou un message d'erreur*

```
i ← 1
Répéter
    P(i) = n mod 2
    n ← n / 2
    i ← i + 1
Tant que  n ≠ 0   et   i ≤ 32

Si  n ≠ 0   et  i > 32
    Afficher : n est trop grand
Sinon
    Pour k de (i -1) à 1
        afficher : P(k)
```

Ex3: Conversion décimal vers binaire : 0 ≤ a < 1

Donnée : Convertir un nombre fractionnaire positif décimal **a** en binaire jusqu'à un maximum de 32 bits.

La conversion consiste à une multiplication de la partie fractionnaire par la base 2 tant qu'elle n'est pas nulle. A chaque étape, la partie entière est le poids d'une puissance de la base. L'algorithme produit le poids fort en premier. De ce fait on peut procéder à l'affichage immédiatement, sans passer par une mémorisation des bits.

Illustration: supposons que **a** ait cette représentation binaire: $0.b_w b_x b_y b_z$ où chaque lettre *b* désigne la valeur d'un bit, 0 ou 1.

Si ce motif binaire est multiplié par 2, il se décale d'un cran vers la gauche: supposons X = $b_w.b_x b_y b_z$
La partie entière notée **PartieEntière(X)** donne b_w
L'algorithme continue avec 0. $b_x b_y b_z$

Conversion_fract_dec2bin

entrée : *a, dans l'intervalle [0, 1[*
sortie : *aucune car l'algo affiche la valeur binaire de a et éventuellement un message d'avertissement*

```
afficher: 0.
i ← 1
Répéter
    a ← 2* a
    b ← PartieEntière( a)
   afficher : b
    a ← a - b
    i ← i + 1
Tant que  a > 0   et   i ≤ 32

Si i > 32
   Afficher : ce résultat est
              une approximation
```

Ex : Conversion virgule flottante vers décimal

Donnée : Convertir la valeur binaire d'une liste F contenant 4 valeurs binaires pour la représentation en virgule flottante du cours M1.L1 slides 36-37.

Comme indiqué sur le dessin à droite:

- F(4) et F(3) sont respectivement les poids des puissances 1 et 0 de l'exposant.
- F(2) et F(1) sont respectivement les poids des puissances -1 et -2 de la mantisse.

Si **l'exposant** a la valeur minimum de **0**, on utilise la **forme dénormalisée**:

X = 2^1 * 0,mantisse

sinon la **forme normalisée**.

X = $2^{exposant}$ * 1,mantisse

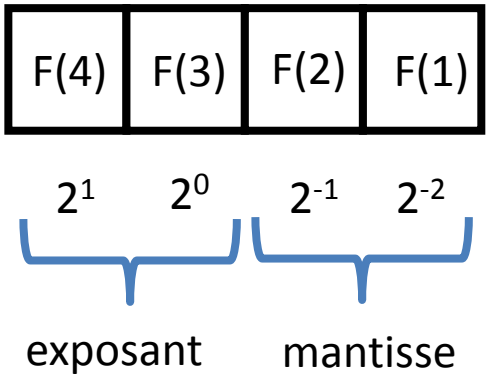
Conversion_virgule_flottante_vers_dec

entrée : *liste F de 4 valeur binaires*
sortie : *la quantité représentée X*

```
exposant ← 2*F(4) + F(3)
mantisse ← 0.5*F(2) + 0.25*F(1)

Si exposant = 0
    // forme dénormalisée
    Sortir : 2 * mantisse
Sinon
    // forme normalisée
    Sortir : 2^exposant * (1+mantisse)
```

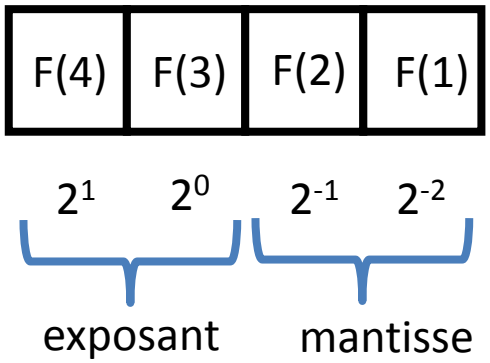
Liste F :



Ex : Conversion décimal vers virgule flottante

Donnée : Convertir la valeur décimale positive X comprise dans l'intervalle [0, 16] vers la représentation de l'exemple simple du cours M1.L1 slides 36-37. On utilise la liste F pour stocker le résultat (dessin).

Liste F :



Méthode: on doit distinguer le cas particulier de 0 et les nombres correspondants à la forme dénormalisée (slide 34) pour la valeur minimum de l'exposant.
Ces nombres sont dans l'intervalle $[0, 2^1[$; on pose **p=1** dans la suite de la méthode.

Pour les autres nombre dans l'intervalle [2, 16[, on calcule **p = *PartieEntière($\log_2(X)$)*** pour trouver dans quelle plage de puissance de 2 se trouve X.

On en déduit **l'exposant** : 0 pour la forme dénormalisée
sinon conversion de **p** en binaire

On obtient la **mantisse** en convertissant en binaire la partie fractionnaire de **$v = X/2^p$.**
Pour la forme dénormalisée, **v** est dans l'intervalle] 0, 1[
Pour la forme normalisée, **v** est dans l'intervalle [1, 2[.

Ex : Conversion décimal vers virgule flottante

Conversion_dec_vers_vflottante

entrée : la quantité décimale X dans l'intervalle [0, 16[
sortie : la liste F du motif binaire du cours M1.L1

```
Si  X = 0                                   // zéro est représenté
    Sortir : F ← {0, 0, 0, 0}               // par le motif binaire nul
Sinon Si  X < 2^1                           // forme dénormalisée
    p ← 1,   F(4) ← 0,   F(3) ← 0
Sinon                                       // forme normalisée
    p ← PartieEntière(log2( X ) )
    F(4) ← p/2                              //division entière
    F(3) ← p mod 2

v   ← X / 2^p                               //division sur les réels
m   ← v - PartieEntière( v )                // obtient la partie fractionnaire
b   ← PartieEntière( 2*m )
F(2) ← b
m   ← 2*m – b                               // obtient la partie fractionnaire
F(1) ← PartieEntière( 2*m )
Sortir: F
```

Ex : détermination si un entier naturel n est premier

Donnée : un entier est premier s'il est strictement supérieur à 1 et s'il est seulement divisible par 1 et par lui-même

ex: 1 n'est pas premier, 7 est premier, 21 n'est pas premier car divisible par 3

Idée de l'algorithme: parcourir chaque entier x à partir de 2, Si n est divisible par x alors il n'est pas premier.

Question: jusqu'où faut-il tester les diviseurs potentiels de n ?

Réponse: on peut se limiter à aller jusqu'à la racine carrée de n. Pourquoi ?

Opérateur utile: *mod* calcule le reste de la division entière

Nombre_premier

entrée : n, entier naturel
sortie : aucune car l'algo affiche un message sur la nature de n

```
Si n < 2
   afficher: n n'est pas premier
   Sortir

max ← racine(n)
x ← 2
Tant que x ≤ max
      Si n mod x = 0
         afficher : n n'est pas premier
         Sortir
       x ← x + 1

  Afficher : n est premier
```

Ce que j'ai appris aujourd'hui

Dans cette leçon, vous avez

- appris ce qu'est un **algorithme** et ses principaux constituants
  - Expressions
  - Structures de contrôle
    - Si alors Sinon,
    - Tant que,
    - Répéter …. Tant que
    - Pour i de ..à ..
    - Sortir

☞ ***Vous pouvez maintenant :***

- construire des algorithmes simples pour des problèmes simples

La suite

La prochaine leçon présentera :

- la notion de ***complexité*** d'un algorithme
- Deux grandes famille d'algorithmes: la recherche et le tri
- La *stratégie descendante (top-down)* de conception