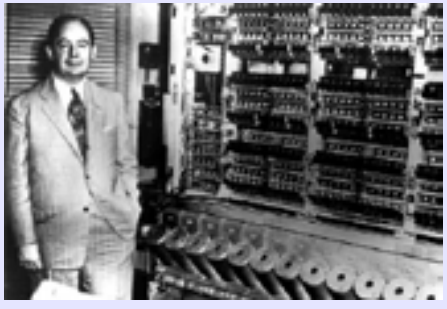




Information, Calcul et Communication
Leçon 2.4 : Compression de données (2ème partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

Plan

Plan détaillé de ces deux leçons :

La semaine dernière:

- notion d'entropie
- compression sans pertes
- algorithme de Shannon-Fano

Aujourd'hui

- algorithme de Shannon-Fano (bis)
- algorithme de Huffman
- analyse de performance – théorème de Shannon
- compression avec pertes

Compression sans pertes : rappel

L'*entropie* d'une séquence de lettres :

$$H(X) = p_1 \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \ \ldots \ + p_n \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

mesure le *désordre/ la variété* / l'« *information* » contenue dans cette séquence :

n = taille de l'alphabet

p_j = probabilité d'apparition d'une lettre

$\log_2(1/p_j)$ = «nombre» de questions binaires nécessaires pour deviner la j^e lettre »

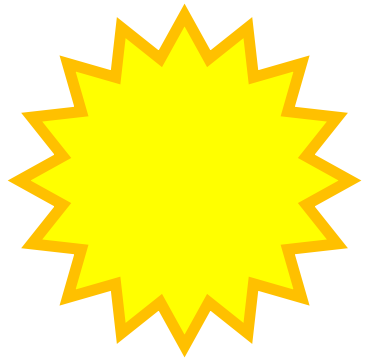
L'*algorithme de Shannon-Fano* permet de représenter une séquence de lettres à l'aide de $H(X)$ bits par lettre en moyenne :

Règle n^0 1 : le nombre de bits attribués à chaque lettre est égal au nombre de questions nécessaires pour la deviner.

Règle n^0 2 : les bits 0 ou 1 sont attribués en fonction des réponses obtenues aux questions.

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

Remarque : La séquence prise en exemple la semaine dernière (IL FAIT BEAU A IBIZA) est particulière, car la probabilité d'apparition p de chaque lettre est une puissance inverse de 2 (c'est-à-dire 1/4, 1/8 ou 1/16).



Donc pour chaque lettre, $\log_2(1/p)$ est un nombre entier, qui correspond exactement au nombre de questions nécessaires pour la deviner.

En pratique, ce n'est bien sûr pas toujours le cas...

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

Considérons par exemple cette autre séquence (12 lettres au total, sans les espaces) :

JE PARS A PARIS

Comment procéder pour représenter cette séquence avec un nombre minimum de bits par lettre ?

A nouveau, reprenons notre jeu des questions et construisons le même tableau qu'avant, en classant les lettres par ordre décroissant du nombre d'apparitions :

lettre	A	P	R	S	J	E	I
nb d'apparitions	3	2	2	2	1	1	1

On remarque ici qu'il n'est pas possible de diviser l'ensemble des lettres en deux parties tel que le nombre d'apparitions à gauche égale le nombre d'apparitions à droite.

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

lettre	A	P	R	S	J	E	I
nb d'apparitions	3	2	2	2	1	1	1

Cependant, on peut faire en sorte de *minimiser la différence* entre le nombre d'apparitions à gauche et à droite.

Dans l'exemple ci-dessus, on a en fait deux possibilités pour la première question :

soit « est-ce que la lettre est un A ou un P ? »

soit « est-ce que la lettre est un A, un P ou un R ? »

Supposons qu'on choisisse la première possibilité ; le jeu continue comme précédemment, avec cette nouvelle règle un peu plus souple...

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

Ce qui nous amène (par exemple !) au tableau suivant :

lettre	A	P	R	S	J	E	I
nb d'apparitions	3	2	2	2	1	1	1
nb de questions	2	2	3	3	3	4	4

Donc le nombre moyen de questions à poser pour deviner une lettre est :

$$\frac{5}{12}\times 2+\frac{5}{12}\times 3+\frac{2}{12}\times 4=\frac{10+15+8}{12}=\frac{33}{12}=\frac{11}{4}=2.75$$

La règle d'attribution des mots de code à chaque lettre est exactement la même qu'avant :

Règle n^0 1 : le nombre de bits attribués à chaque lettre est égal au nombre de questions nécessaires pour la deviner.

Règle n^0 2 : les bits 0 ou 1 sont attribués en fonction des réponses obtenues aux questions. Plus précisément, le bit n^0 j est égal à 1 ou 0 selon que la réponse à la j^e question était oui ou non.

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

Ce qui donne le dictionnaire suivant :

lettre	A	P	R	S	J	E	I
nb d'apparitions	3	2	2	2	1	1	1
nb de questions	2	2	3	3	3	4	4
mot de code	11	10	011	010	001	0001	0000

(remarquer à nouveau qu'aucun mot de code n'est le préfixe d'un autre, *par construction*)

Un calcul en tout point identique au précédent montre que le nombre de bits utilisés pour représenter la séquence

JE PARS A PARIS

au moyen du code ci-dessus est égal à 33 (et le nombre moyen de bits par lettre est donc égal à 33/12 = 2.75)

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

Pour finir, calculons l'entropie de la séquence :

lettre	A	P	R	S	J	E	I
nb d'apparitions	3	2	2	2	1	1	1
probabilité *p*	1/4	1/6	1/6	1/6	1/12	1/12	1/12

(remarquer que $\log_2(1/p)$ n'est pas nécessairement un nombre entier)

Le calcul de l'entropie donne :

$$H(X) = \frac{1}{4}\log_2(4) + \frac{3}{6}\log_2(6) + \frac{3}{12}\log_2(12) = 2.69 \text{ bit}$$

qui est un peu plus petite que la valeur 2.75 trouvée précédemment.

Algorithme de Shannon-Fano (bis)

Une dernière remarque :

Du point de vue du taux de compression (nb moyen de bits/lettre) l'algorithme de Shannon-Fano offre une très bonne performance dans la majorité des cas mais n'est pas garanti être optimal.

Le taux de compression peut être différent selon les regroupements effectués même en respectant la règle de minimiser la différence entre les groupes

Exemple: soit la séquence de 7 lettres : ABRAXAS

Apparitions: 3x A et 1x 4 lettres distinctes

Regroupement : 4 | 3

3	2 bits
1	2 bits
---	---
1	2 bits
1	3 bits
1	3 bits

donc 5x2 + 2x3 = **16** bits au total.

Regroupement : 3 | 4

3	1 bit
---	---
1	3 bits
1	3 bits
1	3 bits
1	3 bits

donc 3x1 + 4x3 = **15** bits au total.

De Shannon-Fano à Huffman

En pratique, on utilise l'algorithme de Huffman qui travaille avec une approche bottom-up de regroupement des nombres d'apparitions:

Initialisation: ensemble des groupes = (lettre, nb apparitions)

Faire

Choisir les 2 groupes avec le plus faible nb d'apparitions

Remplacer ces 2 groupes par un nouveau groupe ayant le total du nombre d'apparitions des 2 groupes

Tant que nombre de groupes > 1

David Albert Huffman
(1925 - 1999)

ingénieur électricien

Une performance optimale est obtenue quelle que soit la manière de construire les groupes selon l'algorithme de Huffman.

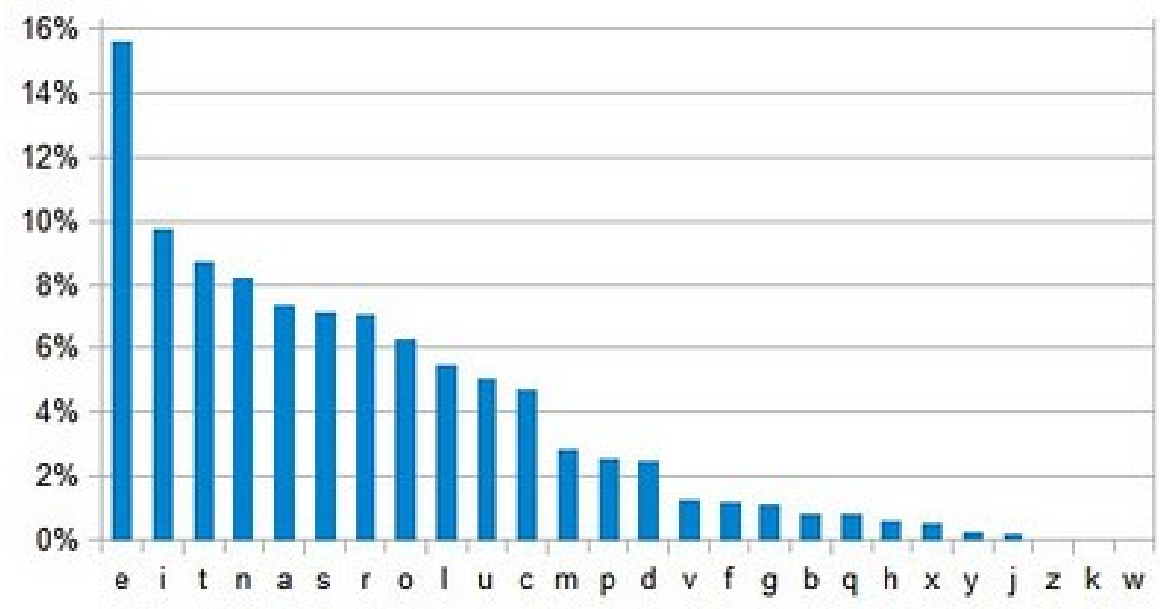
Exercice: appliquer l'algorithme de Huffman sur JE PARS A PARIS

lettre	A	P	R	S	J	E	I
nb d'apparitions	3	2	2	2	1	1	1

A propos du code…

Question : Doit-on toujours recréer un code « depuis le début » pour représenter un message ?

Réponse : Non ! On peut simplement utiliser un code basé sur les probabilités d'apparition des lettres dans la langue française :



(tiré de la déclaration universelle des droits de l'homme)

code optimal ?

Il s'agit d'un compromis : un code peut être optimal pour la distribution d'apparition des lettres pour une langue donnée, et ne pas l'être pour des textes particuliers.

L'exemple ci-dessous provient d'un roman de 300 pages qui respecte une contrainte visible dans cet extrait:

Il poussa un profond soupir, s'assit dans son lit, s'appuyant sur son polochon. Il prit un roman, il l'ouvrit, il lut; mais il n'y saisissait qu'un imbroglio confus, il butait à tout instant sur un mot dont il ignorait la signification.

Analyse de performance

Quelques définitions :

Un *code binaire* est un ensemble C dont les élements $c_1, \ldots, c_n$ (également appelés *mots de code*) sont des suites de 0 et de 1 de longueur finie.

Exemple : { 11, 10, 011, 010, 001, 0001, 0000 }

On note l_j la longueur d'un mot de code c_j.

Exemple : $l_5 = 3$

Un code binaire C est dit *sans préfixe* si aucun mot de code n'est le préfixe d'un autre. Ceci garantit :

que tous les mots de code sont différents ;

que tout message formé de ces mots de code peut être décodé au fur et à mesure de la lecture.

Exemple : avec le code ci-dessus, 1101010011 se lit 11, 010, 10, 011

Analyse de performance

Quelques définitions (suite) :

Le code $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ peut être utilisé pour représenter une séquence X formée avec des lettres tirées d'un alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

chaque lettre a_j est représentée par le mot de code c_j de longueur l_j

Exemple :

lettre	A	P	R	S	J	E	I
mot de code	11	10	011	010	001	0001	0000

Si les lettres $a_1, \ldots, a_n$ apparaissent avec des probabilités $p_1, \ldots, p_n$ dans la séquence X, alors la **longueur moyenne du code** (i.e. le nombre moyen de bits utilisés par lettre) est donnée par

$$L(C) = p_1 l_1 + \ldots + p_n l_n$$

Analyse de performance

Théorème de Shannon : *Quel que soit* le code binaire *C sans préfixe* utilisé pour représenter une séquence X donnée, l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$L(C) \geq H(X)$$

On voit donc également ici apparaître un **seuil** (cf. aussi théorème d'échantillonnage) : en dessous de ce seuil, il n'est pas possible de comprimer des données sans faire de perte.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de l'inégalité suivante :

Inégalité de Kraft : Soit $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ un code binaire sans préfixe. Alors (rappelons que l_j est la longueur du mot de code c_j).

$$2^{-\ell_1} + \ldots + 2^{-\ell_n} \leq 1$$

Démonstration de l'inégalité de Kraft :

Soit l_{max} la longueur du mot de code le plus long dans C.

On peut représenter chaque mot du code C par un nœud dans un arbre binaire de profondeur l_{max}.

On appelle « descendants » d'un mot de code donné les mots de code situés en dessous de celui-ci dans l'arbre.

Observations :

Au niveau l_{max}, il y a $2^{l_{max}}$ nœuds en tout.

Le mot de code c_j a $2^{l_{max}-l_j}$ descendants au niveau l_{max}.

A cause de l'hypothèse (code sans préfixe), les descendants de mots de code distincts sont tous distincts également.

Donc $$2^{\ell_{max}-\ell_1} + \ldots + 2^{\ell_{max}-\ell_n} \leq 2^{\ell_{max}}$$

En divisant de chaque côté par $2^{l_{max}}$, on obtient l'inégalité de Kraft.

Démonstration du théorème de Shannon :

Par définition :

$$H(X) - L(C) = \left(p_1 \log_2 \left(\frac{1}{p_1} \right) + \ldots + p_n \log_2 \left(\frac{1}{p_n} \right) \right) - (p_1 \ell_1 + \ldots + p_n \ell_n)$$

$$= p_1 \left(\log_2 \left(\frac{1}{p_1} \right) - \ell_1 \right) + \ldots + p_n \left(\log_2 \left(\frac{1}{p_n} \right) - \ell_n \right)$$

Remarquer que $-l_j = \log_2 (2^{-l_j})$, donc

$$\log_2 \left(\frac{1}{p_j} \right) - \ell_j = \log_2 \left(\frac{1}{p_j} \right) + \log_2 \left(2^{-\ell_j} \right) = \log_2 \left(\frac{2^{-\ell_j}}{p_j} \right)$$

d'où

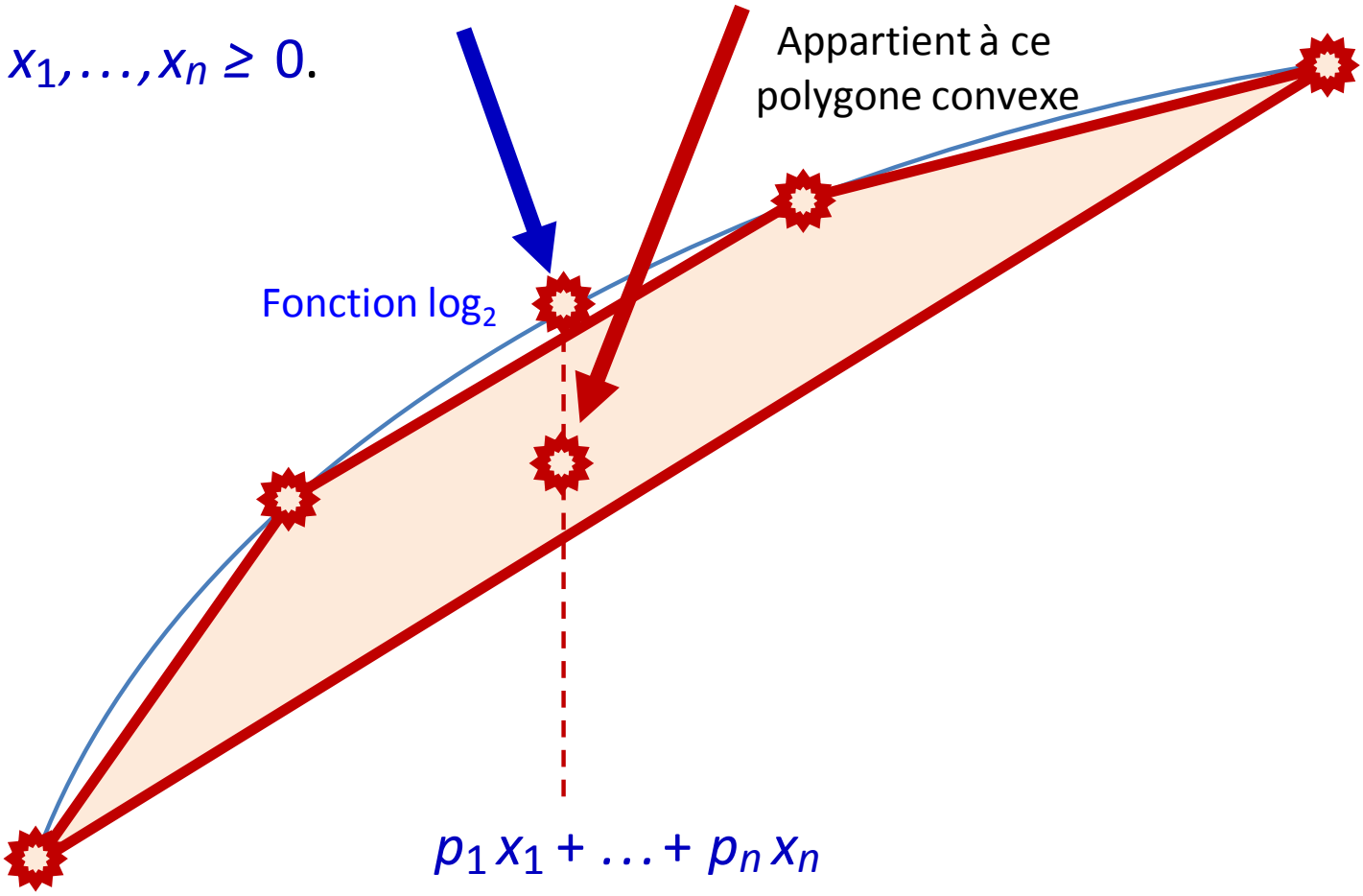
$$H(X) - L(C) = p_1 \log_2 \left(\frac{2^{-\ell_1}}{p_1} \right) + \ldots + p_n \log_2 \left(\frac{2^{-\ell_n}}{p_n} \right)$$

Concavité de la fonction log()

Plus généralement encore, si $0 \leq p_j \leq 1$ et $p_1 + \ldots + p_n = 1$, alors

$$\log_2(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n) \geq p_1 \log_2(x_1) + \ldots + p_n \log_2(x_n)$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.



Démonstration du théorème de Shannon (suite) :

En utilisant à nouveau le fait que $f(x)=\log_2(x)$ est concave, on obtient :

$$H(X)-L(C)=p_1\log_2\left(\frac{2^{-\ell_1}}{p_1}\right)+\ldots+p_n\log_2\left(\frac{2^{-\ell_n}}{p_n}\right)$$

$$\leq\log_2\left(p_1\frac{2^{-\ell_1}}{p_1}+\ldots+p_n\frac{2^{-\ell_n}}{p_n}\right)=\log_2\left(2^{-\ell_1}+\ldots+2^{-\ell_n}\right)$$

Par l'inégalité de Kraft : $2^{-\ell_1}+\ldots+2^{-\ell_n}\leq 1$

et le fait que $f(x)=\log_2(x)$ est croissante, on conclut que

$$H(X)-L(C)\ \leq\ \log_2(1)=0$$

donc $H(X)\leq L(C)$, ce qui prouve le théorème de Shannon.

Analyse de performance

On peut montrer également qu'avec l'algorithme de Shannon-Fano,

$$L(C) \leq H(X) + 1 \text{ (bit /lettre)}$$

et donc que la performance de celui-ci est proche de la meilleure performance qu'on puisse espérer.

Remarques :

L'inégalité ci-dessus est en général pessimiste. On a vu dans l'exemple précédent que $L(C)$ peut être plus proche de $H(X)$, et même égal à $H(X)$ dans le cas idéal.

La démonstration de cette inégalité est un peu technique, donc nous ne la ferons pas ici.

La performance de l'algorithme de Huffman (qui est optimale) est aussi dans ces bornes.

Compression avec pertes

Pour comprimer des données sans perte (et avec un code sans préfixe), on ne peut donc pas descendre en-dessous de la borne de Shannon.

Si on essaye malgré tout en utilisant un algorithme du type « Shannon-Fano », on court à la catastrophe !

Exemple avec le message :

JE PARS A PARIS

Essayons d'utiliser le code suivant :

lettre	A	P	R	S	J	E	I
mot de code	1	0	11	10	01	00	111

Avec un tel code, on n'utilise que 18 bits au total, et pas 33, mais la représentation binaire du message donne : 0100...

Le destinataire ne peut donc pas savoir si le message commence par « JE », « JPP », « PAE », « PAPP » ou encore « PSP »...

Compression avec pertes

Cependant, on est parfois *obligé* de comprimer en faisant des pertes :

- lorsqu'on désire représenter un nombre réel avec un nombre fixé de bits (l'information comprise dans un nombre réel est « infinie ») ;
- lorsqu'on désire échantillonner un signal dont la plus grande fréquence est « infinie » ;
- lorsqu'on désire télécharger sur un site web l'intégralité de ses photos de vacances (quelques Gigaoctets pour une centaine de photos avec la plus haute résolution).

Comment procéder dans ce dernier cas ?

D'abord filtrer les hautes fréquences !

Compression avec pertes : images

De la même manière que l'oreille humaine n'est pas capable de percevoir des sons au-delà de $\sim$20 kHz, l'œil humain a un pouvoir de résolution d'environ une minute d'arc = 1/60 $\sim$0.017 degré, ce qui veut dire qu'il ne distingue pas :

des cratères sur la lune d'un diamètre inférieur à 100km ;

des objets de taille inférieure à 1mm situés à 3m de distance ;

des pixels de taille inférieure à 0.2×0.2mm sur un écran d'ordinateur (à 50cm de distance).

Comment filtrer les hautes fréquences (spatiales) dans une image ?

Une façon simple de faire : moyenner les couleurs sur des zones de plus ou moins grande taille.

☞ c'est un filtre à moyenne mobile !

Compression avec pertes : images

Compression avec pertes : images

Compression avec pertes : images

Compression avec pertes : images

Compression avec pertes : images

On voit apparaître un *compromis* :

plus on utilise des pixels de grande taille, moins on a besoin d'espace-mémoire pour stocker l'image...

mais plus le signal d'origine est déformé : on parle de **distorsion**.

Il existe bien sûr des algorithmes beaucoup plus sophistiqués pour comprimer une image avec pertes :

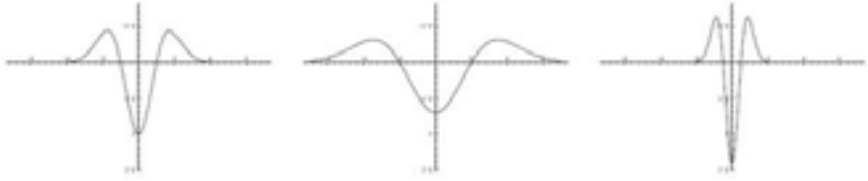
format JPEG :

analyse les fréquences spatiales présentes dans l'image ;

n'en retient que les plus basses;

utilise un algorithme de compression sans pertes sur le résultat.

format JPEG 2000 : la même chose, mais avec des *ondelettes*.



ondelette mexican hat à différentes échelles

Compression avec pertes : son

Et pour le son, comment procéder ?

Pour rappel, le son enregistré sur un CD est échantillonné à 44.1 kHz, et chaque échantillon est encodé sur 2×16 bits (2 canaux pour la stéréo).

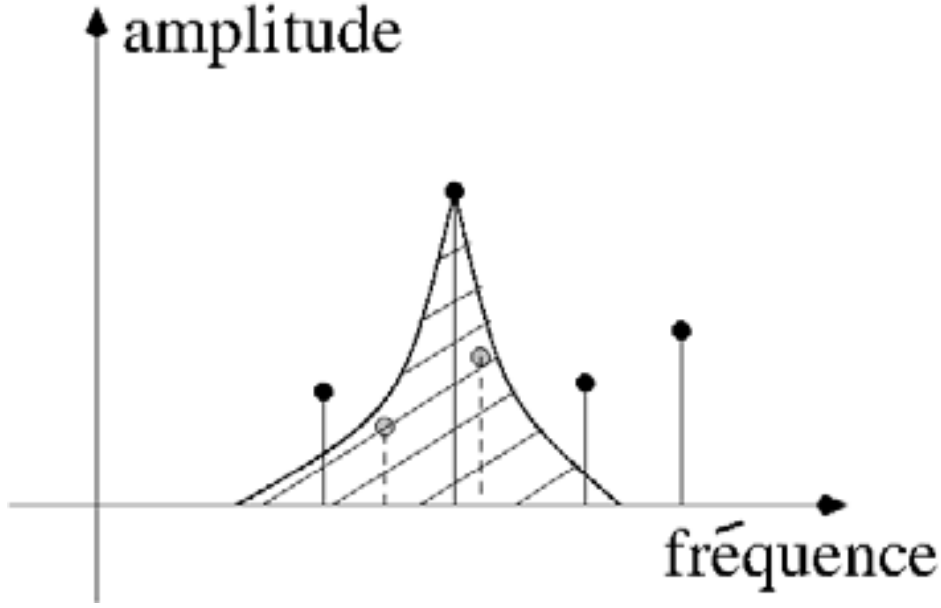
Pour une seconde, il faut donc $44100 \times 16 \times 2$ soit environ 1.4 Mégabits.

Le format MP3 permet d'encoder cette information sur 128 kilobits seulement, ce qui correspond-on à une réduction de 90% de la taille d'un fichier ! (sans déformation *sensiblement audible* du son)

Quel est le « truc » ?

Compression avec pertes : son

C'est (en partie) grâce à *l'effet de masque* : lorsqu'une sinusoïde avec une certaine fréquence est présente avec grande amplitude dans un son, elle cache à l'oreille humaine les autres sinusoïdes de fréquences proches et de moindre amplitude (c'est un effet *psychoacoustique*).



En conséquence, il n'y a pas besoin d'encoder une partie du signal avec autant de précision car on ne l'entend pas ou en tout cas beaucoup moins !
La même chose est vraie pour des sons rapprochés dans le temps.

Compression avec pertes : son

Voici un lien vers une chanson a cappella de Suzanne Véga qui a posé des problèmes à Karlheinz Brandenburg et ses collègues dans la mise au point du format MP3 (autour de 1993)

http://www.youtube.com/watch?v=mNWyF3iSMzs

La méthode de compression avec perte qui fonctionnaient bien pour la plupart des morceaux de musique posait des problèmes pour ce type de déclamation. C'est devenu un des morceaux de référence pour évaluer le MP3.

Conclusion

Dans ce module, nous avons vu :

Un aperçu de la théorie de l'*échantillonnage des signaux*.

Un aperçu de la théorie de la *compression de données*.

Ces deux théories sont deux facettes d'un seul et même sujet...

...avec deux résultats centraux de même nature !

Si vous ne deviez retenir qu'une seule chose de ce module :

Il est toujours possible de stocker un signal ou des données en économisant de l'espace-mémoire !

Il y a cependant des seuils à ne pas dépasser si on ne veut pas faire de pertes...

Les mesures de ces seuils sont respectivement la bande passante et l'entropie

Annexe

codage sans perte d'une image : couleurs indexées GIF / PNG

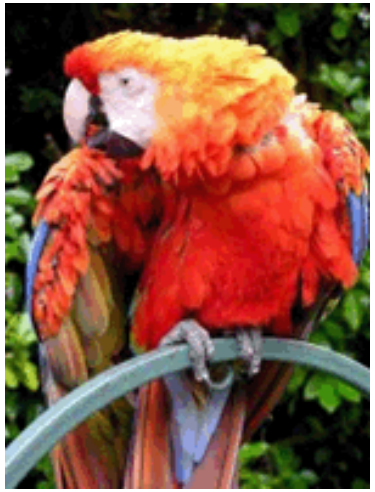
construction d'une palette de 4, 16 ou 256 couleurs
- chaque pixel mémorise seulement l'index vers la palette.
- chaque couleur de la palette est définie avec 4 octets

0	0	1	2	3
0	1	2	3	2
1	2	3	2	1
2	3	2	1	0
3	2	1	0	0

pour des images avec:
- un petit nombre de couleurs bien définies

dessin technique, BD, manga, comics

- des nuances mais très localisées



[wikipedia indexed colors]