

# Information, Calcul et Communication

## Module 2 : Information et Communication

# Information, Calcul et Communication

## Leçon 2.2 : Echantillonnage de signaux (2ème partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

# Echantillonnage de signaux : rappel

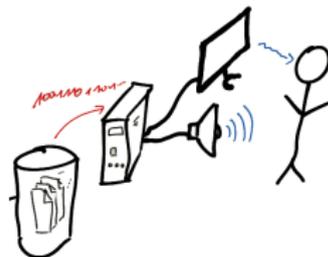
## La semaine dernière :

- ▶ signaux, fréquences
- ▶ filtrage
- ▶ échantillonnage



## Aujourd'hui :

- ▶ reconstruction
- ▶ théorème d'échantillonnage
- ▶ sous-échantillonnage



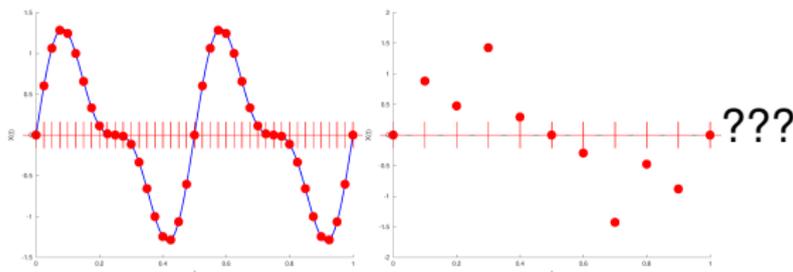
# Echantillonnage de signaux : rappel

- ▶ signal ( $X(t), t \in \mathbb{R}$ ) ; p. ex. : sinusoïde
- ▶ « tout signal est une somme finie de sinusoïdes »
- ▶ spectre: fréquence(s) présente(s) dans un signal, bande passante:  $f_{max}$
- ▶ filtre passe-bas idéal et filtre à moyenne mobile
- ▶ signal échantillonné ( $X(nT_e), n \in \mathbb{Z}$ )  
( $T_e$  : période d'échantillonnage;  $f_e = 1/T_e$  : fréquence d'échantillonnage)
- ▶ condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal :  $f_e > 2f_{max}$
- ▶ sinon ( $f_e \leq 2f_{max}$ ) : effet stroboscopique

# Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal  $(X(t), t \in \mathbb{R})$   
à partir de sa version échantillonnée  $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$  ?

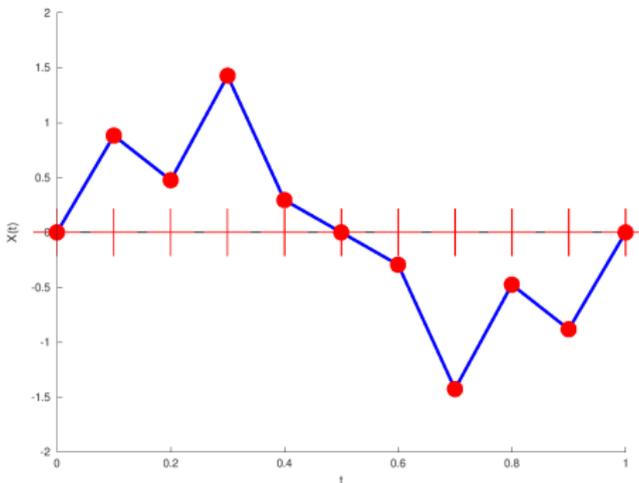
- ▶ Dans certains cas, c'est « assez clair »...
- ▶ Dans d'autres, ça l'est un peu moins!



# Reconstruction d'un signal

On dispose de plusieurs techniques pour interpoler un signal :

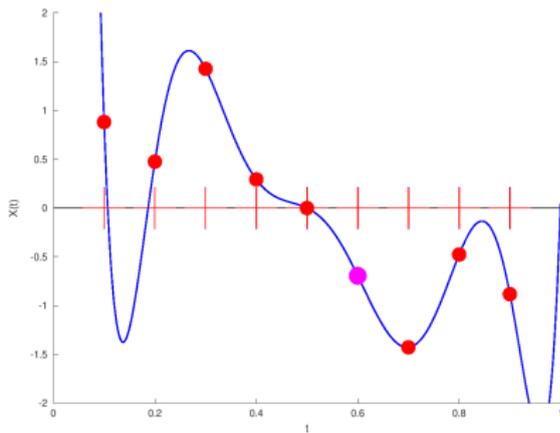
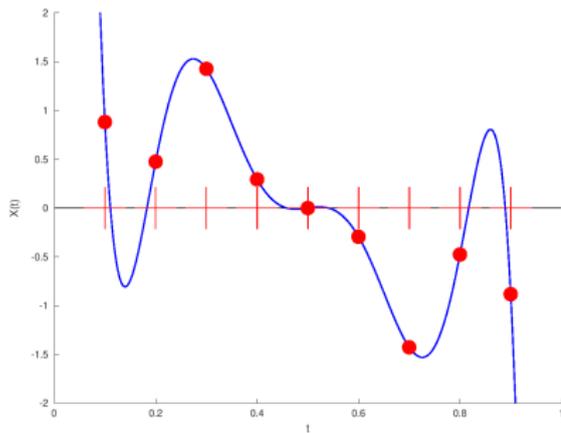
1. « Relier les points » : dans l'exemple précédent, ça donne ceci :



Un défaut principal : la « courbe » obtenue n'est **pas régulière** (non dérivable en plusieurs points)

# Reconstruction d'un signal

## 2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.



Trois défauts principaux :

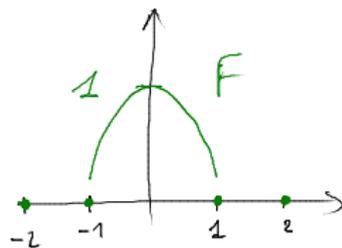
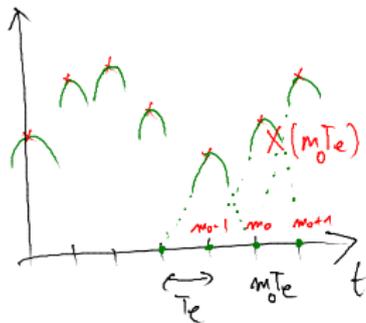
- ▶ Avec  $N$  points, il faut trouver un polynôme de degré  $N - 1$  : la procédure est **complexe** !
- ▶ Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.
- ▶ N'est pas borné.

# Reconstruction d'un signal

3. De manière générale, une formule d'interpolation pour  $X(t)$  s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

(pour prendre vos propres notes)



$$F(0) = 1$$

$$F(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\sum_m X(mT_e) F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Note:  $F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right) = F\left(\frac{t}{T_e} - m\right)$

$$m_0: \dots + X((m_0 - 1)T_e) F\left(\frac{t - (m_0 - 1)T_e}{T_e}\right) + X(m_0 T_e) F\left(\frac{t - m_0 T_e}{T_e}\right) + X((m_0 + 1)T_e) F\left(\frac{t - (m_0 + 1)T_e}{T_e}\right) + \dots$$

Diagram illustrating the evaluation of the reconstruction formula at  $t = m_0 T_e$ :

- The first term  $X((m_0 - 1)T_e) F(\dots)$  is shown to be 0.
- The middle term  $X(m_0 T_e) F\left(\frac{t - m_0 T_e}{T_e}\right)$  is evaluated at  $t = m_0 T_e$ , resulting in  $X(m_0 T_e) F(0) = X(m_0 T_e)$ .
- The third term  $X((m_0 + 1)T_e) F(\dots)$  is shown to be 0.

$$\rightarrow X_I(m_0 T_e) = X(m_0 T_e)$$

# Reconstruction d'un signal

3. De manière générale, une formule d'interpolation pour  $X(t)$  s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(k) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^*$$

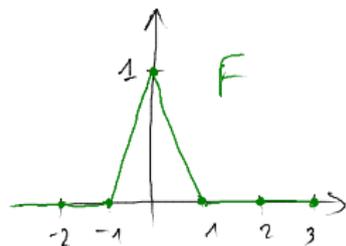
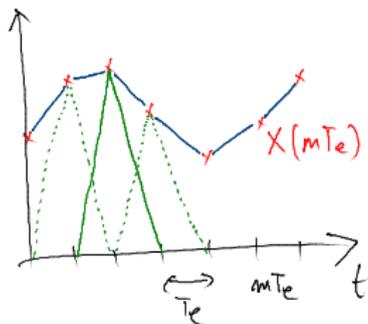
Cette condition implique en particulier que

$$X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} :$$

$$X_I(nT_e) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F\left(\frac{nT_e - mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F(n - m) = X(nT_e)$$

Quelle fonction  $F$  choisir ?

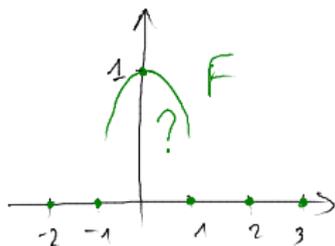
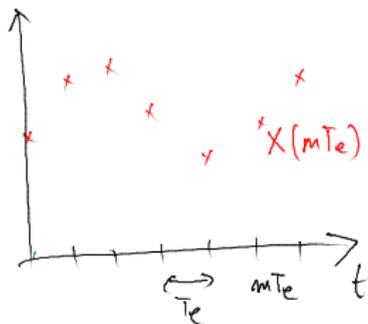
(pour prendre vos propres notes)



$$F(0) = 1$$

$$F(k) = 0, k \in \mathbb{Z}^*$$

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



$$F(0) = 1$$

$$F(k) = 0, k \in \mathbb{Z}^*$$

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \underbrace{F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)}_{\substack{1 - |t| \\ (t+1)(t-1) \\ (t+2)(t+1)(t-1)(t-2) \\ (t+3)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)(t-3) \\ \vdots}}$$

degré

1

2

4

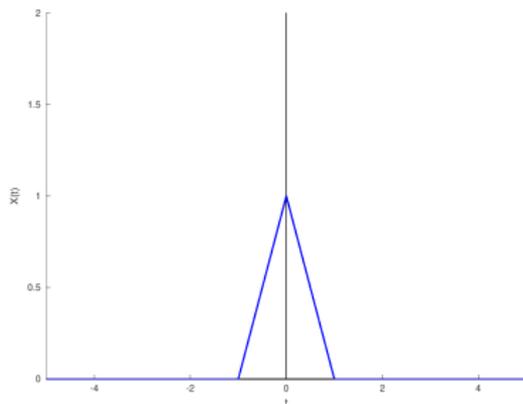
6

⋮

# Reconstruction d'un signal

La fonction  $F$  qui permet de « relier les points » est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$



On peut faire mieux en choisissant

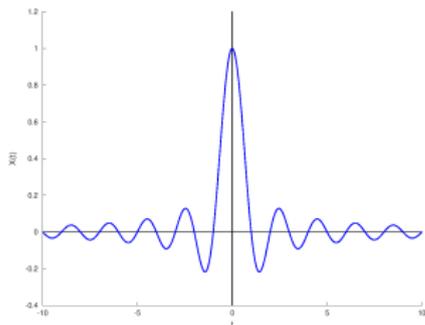
$$F(t) = (1 - t)(1 + t)(1 - \frac{t}{2})(1 + \frac{t}{2})(1 - \frac{t}{3})(1 + \frac{t}{3}) \dots$$

Cette fonction est régulière, et on vérifie que  $F(0) = 1$  et  $F(k) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

# Reconstruction d'un signal : interpolation

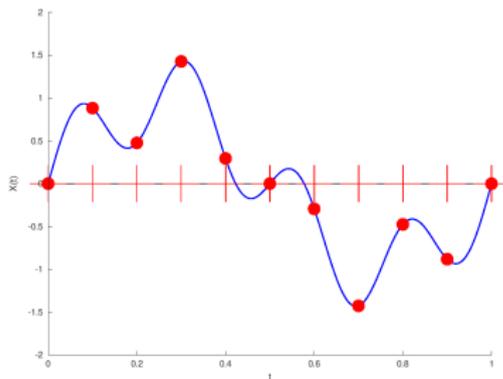
Il se trouve que la fonction  $F$  du bas de la page précédente est égale à

$$F(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Ce qui donne dans notre exemple :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



# Reconstruction d'un signal : interpolation

Pour retrouver un signal à partir de sa version échantillonnée, on a donc maintenant une formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc} \left( \frac{t - mT_e}{T_e} \right)$$

Il nous reste une question cruciale à résoudre :  
quand est-ce que  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ?

# Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

1. Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), mathématicien anglais, qui publie en 1915 la formule d'interpolation qu'on vient de voir.



# Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

2. Harry Nyquist (1889-1979), ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1928 un article sur « la théorie de la transmission par le télégraphe ».



# Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

3. Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (1908-2005), pionnier de la radio-astronomie, qui découvre ce résultat indépendamment en **1933** en Union Soviétique.



# Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

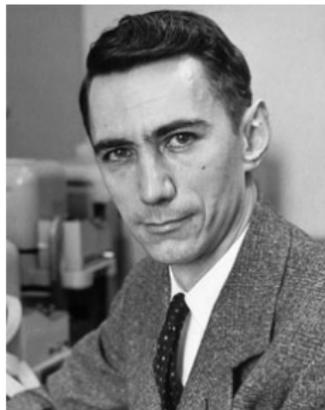
4. Herbert Raabe (1909-2004), qui publie sa thèse sur le sujet en 1939 en Allemagne...



# Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

5. Claude Edwood Shannon (1916-2001), également ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1949 un article sur la « communication en présence de bruit », et que nous allons revoir la semaine prochaine...



# Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- ▶  $X(t)$  un signal de bande passante  $f_{\max}$  ;
- ▶  $X(nT_e)$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ) le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  ;
- ▶  $X_I(t)$  donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc} \left( \frac{t - mT_e}{T_e} \right)$$

Alors :

Si  $f_e > 2f_{\max}$  alors  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$

et

Si  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  alors  $f_e \geq 2f_{\max}$

(c.-à-d. Si  $f_e < 2f_{\max}$  alors il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $X_I(t_0) \neq X(t_0)$ )

# Le théorème d'échantillonnage : illustration

Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f t)$$

La version échantillonnée de ce signal est :  $X(nT_e) = \sin(2\pi f nT_e)$  et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sin(2\pi f mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

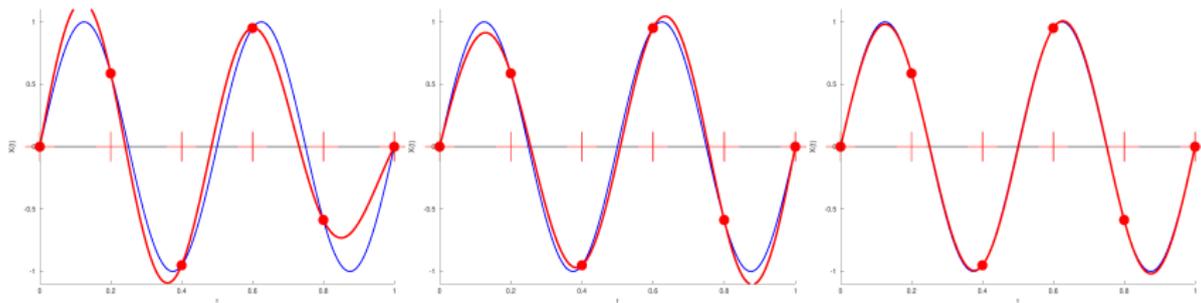
De manière pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

# Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2$  Hz et  $f_e = 5$  Hz (donc  $T_e = 0.2$  sec) :

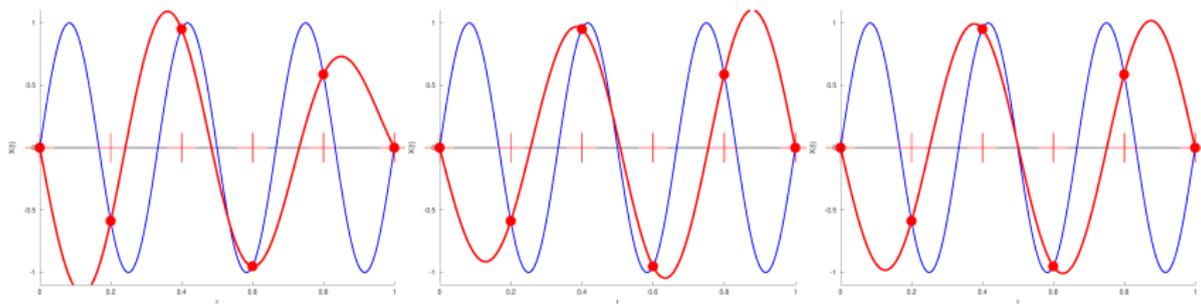


avec  $N = 5, 10, 50$ . Si  $f_e > 2f$ , la reconstruction est bonne.

# Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 3$  Hz et  $f_e = 5$  Hz (donc  $T_e = 0.2$  sec) :

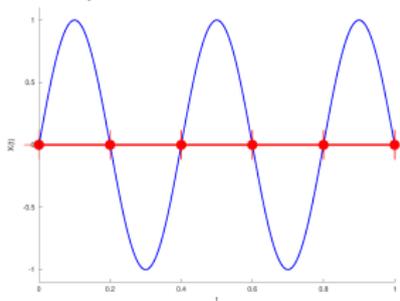


avec  $N = 5, 10, 50$ . Ici, par contre,  $f_e < 2f$  : on a un problème...  
Et si  $f_e = 2f$  ?

# Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour  $f = 2.5$  Hz et  $f_e = 5$  Hz (donc  $T_e = 0.2$  sec) :

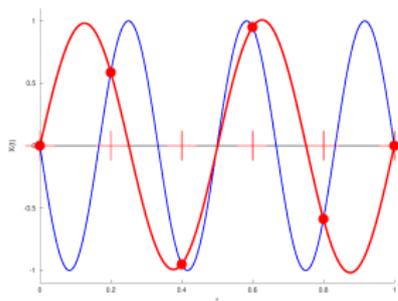
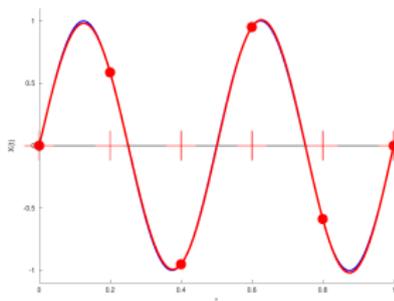


fonction nulle, pour toute valeur de  $N$  ! Ici aussi, on a un problème...

# Essays de mieux comprendre cet exemple

*Rappel* : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5$  Hz.

- ▶ Quand  $f = 2$  Hz, la reconstruction est bonne.
- ▶ Quand  $f = 3$  Hz, la reconstruction est mauvaise.



- ▶ Retournons le graphe de droite, juste pour voir...
- ▶ Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- ▶ La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite ! (mais pas le signal d'origine)

## Exemple : conclusion

*Rappel* : la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 5$  Hz.

- ▶ A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de  $f = 2$  Hz ou de  $f = 3$  Hz (déphasée de  $\pi$ ).
- ▶ Dans une telle situation, notre formule d'interpolation « choisit » la fréquence la plus basse, i.e.  $f = 2$  Hz.
- ▶ Donc, si on sait dès le départ que la fréquence  $f$  de la sinusoïde d'origine est plus petite que  $f_e/2 = 2.5$  Hz, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- ▶ Si par contre la fréquence  $f$  est plus grande que  $f_e/2 = 2.5$  Hz, alors la formule d'interpolation « choisit » la mauvaise fréquence :  $\tilde{f} = f_e - f$ , c'est l'effet stroboscopique qu'on a vu la semaine dernière.

# Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- ▶  $X(t)$  un signal de bande passante  $f_{\max}$  ;
- ▶  $X(nT_e)$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ) le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  ;
- ▶  $X_I(t)$  donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Alors :

Si  $f_e > 2f_{\max}$  alors  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$

et

Si  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  alors  $f_e \geq 2f_{\max}$

(c.-à-d. Si  $f_e < 2f_{\max}$  alors il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $X_I(t_0) \neq X(t_0)$ )

# Avant les maths: pourquoi la condition

$$f_e > 2f_{\max}?$$

- ▶ Dans tous les exemples vus précédemment, on avait à faire à un signal  $X(t)$  avec une seule fréquence  $f$ .
- ▶ On a vu dans ce cas que  $f_e > 2f$  est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.
- ▶ Et si maintenant le signal  $X(t)$  contient deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ ?
- ▶ Dans ce cas, il suffira que  $f_e > 2f_1$  et  $f_e > 2f_2$  pour que le signal soit bien reconstruit, i.e. que  $f_e > 2 \max\{f_1, f_2\}$ .
- ▶ En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc intuitivement à la condition  $f_e > 2f_{\max}$ .

# Idée de la démonstration : première partie

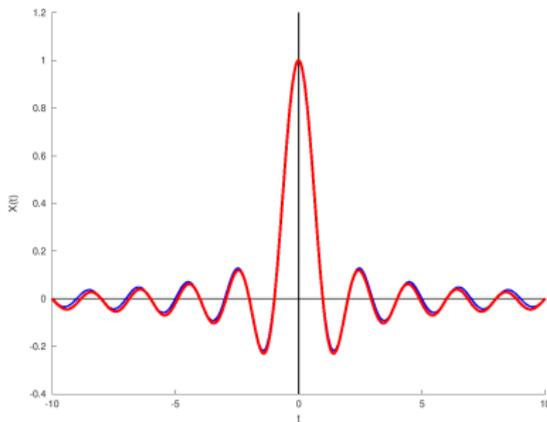
Dans ce qui suit, nous justifions de manière informelle l'affirmation :

Si  $f_e > 2 f_{\max}$ , alors  $X_i(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

La fonction **sinc** est le résultat du mélange de plusieurs sinusoïdes :

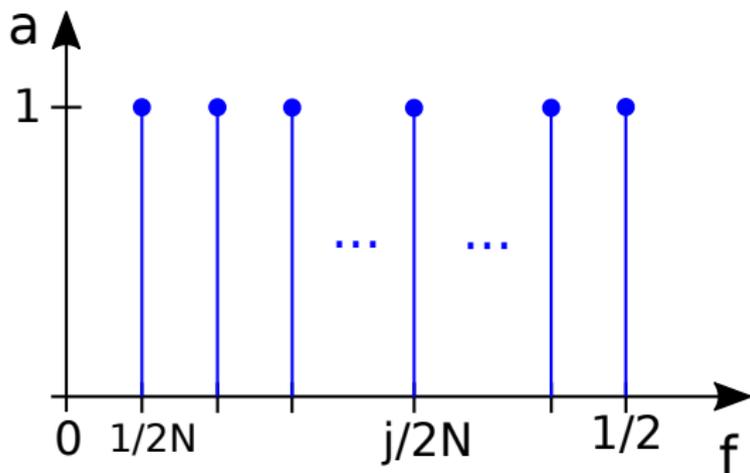
$$\text{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi/2) \quad \text{avec } N \text{ grand et } f_j = \frac{j}{2N}$$

On voit ci-contre (en rouge) ce que vaut cette approximation pour  $N = 50$ .



# Idée de la démonstration : première partie (suite)

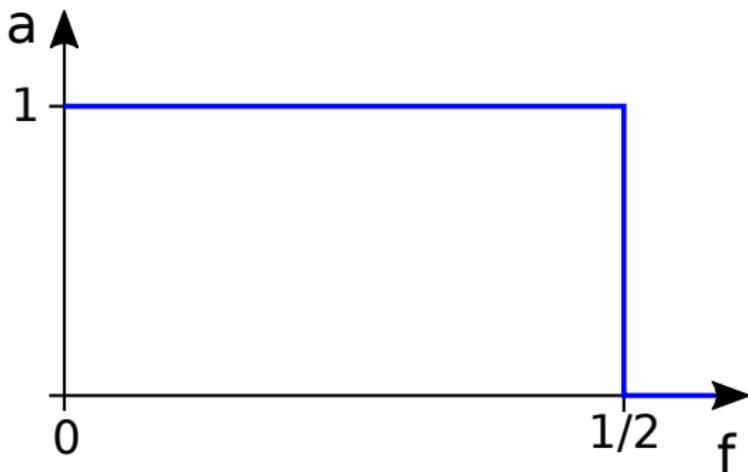
Notez que les fréquences  $f_j = j/(2N)$  couvrent l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ .



## Idée de la démonstration : première partie (suite)

Notez que les fréquences  $f_j = j/(2N)$  couvrent l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ .

Donc toutes les fréquences comprises dans l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  sont présentes dans la fonction  $\text{sinc}(t)$ .



# Idée de la démonstration : première partie (suite)

Notez que les fréquences  $f_j = j/(2N)$  couvrent l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ .

Donc toutes les fréquences comprises dans l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  sont présentes dans la fonction  $\text{sinc}(t)$ .

En conséquence, la fonction  $\text{sinc}(t/T_e) = \text{sinc}(f_e t)$  contient toutes les fréquences comprises dans l'intervalle  $[0, \frac{f_e}{2}]$ .

La bande passante du signal  $\text{sinc}(f_e t)$  est donc  $B = \frac{f_e}{2}$ .

Or c'est justement la fonction  $\text{sinc}(f_e t)$  qu'on utilise pour reconstruire le signal :

La bande passante du signal interpolé  $X_I(t)$   
est donc **plus petite ou égale** à  $\frac{f_e}{2}$ .

## Idée de la démonstration : première partie (suite)

Etant donné l'hypothèse effectuée ( $2f_{\max} < f_e$ ), la bande passante du signal d'origine  $X(t)$  est aussi plus petite ou égale à  $\frac{f_e}{2}$ .

Nous avons vu de plus que  $X_I(t)$  et  $X(t)$  prennent les mêmes valeurs aux points d'interpolation  $nT_e$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Or on peut montrer le résultat suivant :

Deux signaux dont la bande passante est plus petite ou égale à  $B = \frac{f_e}{2}$  et qui coïncident aux points  $nT_e$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , coïncident en fait partout !

En conclusion :

Sous l'hypothèse que  $f_e > 2f_{\max}$ , on a bien  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

# Idée de la démonstration : seconde partie

Vérifions maintenant l'affirmation « *réciroque* » :

Si  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  alors  $f_e \geq 2 f_{\max}$ .

- ▶ Si  $X_I(t) = X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors...
- ▶ ...ils ont même bande passante.  
(forcément : ce sont les mêmes signaux).
- ▶ Or on a vu que la bande passante de  $X_I(t)$  est inférieure ou égale à  $f_e/2$ .
- ▶ Donc  $f_{\max}$  (de  $X$ ) est inférieure ou égale à  $f_e/2$ .

QED.

# Sous-échantillonnage d'un signal

Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence  $f_e < 2f_{\max}$  apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé la semaine dernière.

En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !

**Une solution simple, mais coûteuse** : augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à satisfaire la condition  $f_e > 2f_{\max}$ .

# Effet stroboscopique : une autre solution

Cependant, certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique : des fréquences très élevées).

Pour ces signaux,  $f_{\max} = +\infty$  : des tels signaux sont donc *toujours* sous-échantillonnés, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ .

Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?

# Effet stroboscopique : une autre solution

Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

**filtrer le signal *avant* de l'échantillonner !**

- ▶ on filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure  $f_c$  est juste un peu plus petite que  $\frac{f_e}{2}$ .
- ▶ puis on échantillonne le signal à la fréquence  $f_e$  ;
- ▶ et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite ; on n'a donc pas d'effet stroboscopique.

# Echantillonnage de signaux : conclusion

- ▶ De façon surprenante, un signal à temps continu ( $X(t), t \in \mathbb{R}$ ) peut sous certaines conditions être **reconstruit parfaitement** à partir de sa version échantillonnée ( $X(nT_e), n \in \mathbb{Z}$ ).
- ▶ Le théorème d'échantillonnage nous donne le **seuil** ( $2f_{\max}$ ) au dessus duquel la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est suffisante pour permettre une reconstruction parfaite du signal.
- ▶ En dessous de ce seuil, l'**effet stroboscopique** apparaît.
- ▶ On peut éviter l'apparition d'un tel phénomène en **filtrant** le signal **avant** de l'**échantillonner**.

# Echantillonnage de signaux : 2<sup>e</sup> conclusion

L' échantillonnage et la reconstruction de signaux ont permis une transformation profonde des télécommunications :

des signaux analogiques, on est passé aux signaux numériques, qui permettent un transfert bien plus efficace de l'information.

# Annexe : justification de la formule d'approximation du sinc

Pourquoi

$$\text{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi/2) \quad \text{avec } f_j = \frac{j}{2N} \quad ?$$

Somme de Riemann (de pas  $\frac{1}{2N}$ ):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi t \cdot \frac{j}{2N} + \pi/2) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t f + \pi/2) df$$

Trigonométrie:

$$\sin(2\pi f t + \pi/2) = \cos(2\pi f t)$$

Primitive du cosinus:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t f) df = \frac{\sin(2\pi t \frac{1}{2}) - 0}{2\pi t} = \frac{1}{2} \text{sinc}(t)$$