EPFL Automne 2018-19
Geometrie, MATH-120

Série 1

Définition 1. *Soit X un ensemble. Une distance est une application*

$$d(\cdot,\cdot) : \begin{array}{ccc} X \times X & \mapsto & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ (P,Q) & \mapsto & d(P,Q) \end{array}$$

qui verifie les proprietes suivantes

— *Separation des points : pour tout $P, Q \in X$,*

$$d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q.$$

— *Symetrie : pour tout $P, Q \in X$,*

$$d(P,Q) = d(Q,P).$$

— *Inegalite du triangle : pour tout $P, Q, R \in X$,*

$$d(P,R) \leqslant d(P,Q) + d(Q,R).$$

Pour $r \geqslant 0$, et $P \in X$, la sphere (resp. boule) centree en P et de rayon r est l'ensemble

$$\mathcal{C}(P,r) = \{Q \in X,\ d(P,Q) = r\} \subset X$$

$$(resp. \mathcal{B}(P,r) = \{Q \in X,\ d(P,Q) \leqslant r\} \subset X.)$$

Un ensemble muni d'une distance s'appelle un espace metrique.

Définition 2. *Soit (X,d) un espace metrique. Un isometrie de (X,d) est une application*

$$\varphi : X \to X$$

telle que

$$\forall P, Q \in X,\ d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P,Q).$$

On note $\mathrm{Isom}(X,d) \subset \mathrm{Hom}_{Ens}(X,X)$ *l'ensemble des isometries.*

Exercice 1. Soit X un ensemble possedant au moins 2 elements, montrer que l'application suivante est une distance (dite distance de Hamming)

$$d_H : (P,Q) \in X \times X \mapsto \begin{cases} 0 & P = Q \\ 1 & P \neq Q \end{cases}.$$

Soit $P \in X$, decrire $\mathcal{C}(P,1), \mathcal{C}(P,2),\ \mathcal{B}(P,1/2), \mathcal{C}(P,1)$.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace metrique et $\mathrm{Isom}(X, d)$ ses isometries. Montrer que

- L'identite Id_X est une isometrie.
- La composee de deux isometries est une isometrie.
- Une isometrie est toujours injective.
- Si une isometrie φ est bijective alors sa reciproque φ^{-1} est encore une isometrie.

Exercice 3. Montrer qu'une isometrie n'est pas forcement bijective : on pourra utiliser la distance de Hamming sur un espace de cardinal infini -pourquoi infini ?-. Ainsi en general l'ensemble des isometries d'un espace metrique n'est pas un groupe.

Exercice 4. Montrer que les applications suivantes definissent des distances sur $\mathbb{R}^2$. Pour chacune de ces distances, dessiner la boule unite centree a l'origine (on note $\mathbf{0} = (0, 0)$)

$$B_d(\mathbf{0}, 1) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(\mathbf{0}, (x, y)) \leqslant 1\}.$$

$$d_0((x, y), (x', y')) = \delta_{x \neq x'} + \delta_{y \neq y'},\ \text{avec } \delta_{x \neq x'} = \begin{cases} 0 & si\ x = x' \\ 1 & si\ x \neq x' \end{cases}.$$

$$d_1((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|.$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = (|x - x'|^2 + |y - y'|^2)^{1/2}.$$

$$d_4((x, y), (x', y')) = (|x - x'|^4 + |y - y'|^4)^{1/4}.$$

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(|x - x'|, |y - y'|).$$

Pour les distance $d_i,\ i = 1, 2, 4$ on pourra introduire la "norme"

$$\vec{u} = (x, y),\ \|\vec{u}\|_i := (|x|^i + |y|^i)^{1/i}$$

et montrer que

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \|\vec{u} + \vec{v}\|_i \leqslant \|\vec{u}\|_i + \|\vec{v}\|_i.$$

Pour cela on pourra utiliser l'homogeneite (ie.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda \vec{u}\|_i = |\lambda| \|\vec{u}\|_i$$

pour ce ramener au cas $x = 1$.