EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 3

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application lineaire.

1. Montrer que si ϕ preserve la longueur ($\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ \|\phi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$) alors ϕ est une isometrie.
2. Soit $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1} = (1,0), \mathbf{e}_{0,2} = (0,1))$ la base canonique. Montrer que si sa transformee par ϕ, $\phi(\mathcal{B}_0) = (\phi(\mathbf{e}_{0,1}), \phi(\mathbf{e}_{0,2}))$ est orthonormee alors ϕ est une isometrie.
3. Etant donne une base orthonormee $\mathcal{B}$, montrer qu'il existe une isometrie ϕ qui envoie $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{B}$ (on cherchera une application lineaire).
4. Etant donne deux bases orthonormees $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, montrer qu'il existe une isometrie ϕ qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. Montrer qu'une isometrie φ de partie lineaire φ_0 verifie

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \varphi_0(\overrightarrow{PQ})$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_n)$ un ensemble ordonne de points du plan et $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ un vecteur de reels positifs ou nuls tels que

$$\sum_i \lambda_i = 1.$$

Le barycentre des points $\mathcal{P}$ affectes des poids Λ est le point

$$\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$$

Par exemple si $n = 2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ le barycentre est le milieu.

1. Montrer que le barycentre $\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)$ est l'unique point $G \in \mathbb{R}^2$ qui verifie

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.$$

2. Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ une isometrie. Montrer que φ preserve les barycentres :

$$\mathrm{Bar}(\varphi(\mathcal{P}), \Lambda) = \varphi(\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)).$$

Pour cela on pourra decomposer ϕ en translation et partie lineaire.

3. Montrer plus generalement que φ preserve les barycentres "generalises" ou on ne demande pas forcement que les poids $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ soient des reels positifs ou nuls.

Exercice 4. Une *application affine* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application de la forme

$$\varphi : P \mapsto t \circ \varphi_0(P)$$

ou t est une translation et $\varphi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application lineaire.

1. Montrer plus generalement que la propriete de preserver les barycentres (quelque soit le signe des poids) est vraie pour toute application affine.
2. Montrer que toute application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui preserve les barycentres est une application affine ; on pourra commencer par se ramener au cas ou $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et montrer qu'alors φ est lineaire ; pour cela on considerera des barycentres particuliers.
3. Que l'enonce precedent reste vrai si on suppose seulement que l'application preserve les barycentres de poids positifs ou nuls.
4. Une *transformation affine* de $\mathbb{R}^2$ est une application affine bijective. On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \subset Bij(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des transformation affines. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe de $Bij(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5. Soient $(G, .)$ un groupe et K, L des sous-groupes. On suppose que

— $G = K.H : \forall g \in G,\ \exists (k, l) \in K \times L$ tel $g = k.l$.
— K des distingue dans G.
— $K \cap L = \{e_G\}$.

Dans ces condition on dit que G est le produit semi-direct de K par L et on le note $G = K \ltimes L$.

1. Montrer que l'ecriture d'un element g sous la forme $g = k.l$ est unique. On notera alors $k_g \in K$ et $l_g \in L$ les elements de cette decomposition.
2. Montrer que l'application $l. : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & L \\ g & \mapsto & l_g \end{array}$ est un morphisme de groupe surjectif de noyau K.
3. Calculer $k_{gg'}$ en fonction de $k_g, k_{g'}$ et l_g.
4. Donner un exemple de groupe qui soit un produit semi-direct de deux sous-groupes.
5. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ est un produit semi-direct.