EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 5

Exercice 1. On a vu que etant donne $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non-nuls perpendiculaires, l'application

$$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$

est une isometrie lineaire : la symetrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$.

1. Montrer que si $\vec{v} = (C, S)$, la matrice M de $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathrm{c} = 1 - 2\frac{C^2}{C^2 + S^2},\ \mathrm{s} = -2\frac{CS}{C^2 + S^2}. \tag{0.1}$$

2. Reciproquement etant donne une matrice non-speciale

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix},\ \mathrm{c}^2 + \mathrm{s}^2 = 1$$

montrer que M est la matrice d'une symetrie orthogonale et donne des coordonnees pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 2.

1. Donner la matrice de la symetrie σ d'axe la droite d'equation

$$3x + 4y = 0?$$

2. Quelle est la nature de l'application lineaire ϕ de matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que ϕ est d'ordre 8.

3. Quelle est la nature (et donner les points fixes) de la composee $\phi \circ \sigma$.
4. Memes questions pour $\sigma \circ \phi$.
5. Calculer ϕ^{2018} et $(\phi \circ s)^{2018}$.

Exercice 3. 1. Montrer que toute matrice orthogonale O est le produit de une ou deux matrices de symetrie :

$$O = S \text{ ou bien } O = S.S', \; S, S' \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}).$$

Dans le second cas on pourra prendre

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donner explicitement la matrice S en fonction de la matrice O.

2. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$ est engendre par les symetries.

Exercice 4. Soit X un ensemble et $\varphi, \psi \in \mathrm{Bij}(X)$ deux bijections de X sur lui-meme. Soit

$$Fix(\varphi) = \{x \in X, \; \varphi(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes de φ.

1. Montrer que

$$\psi(Fix(\varphi)) = Fix(\mathrm{Ad}(\psi)(\varphi)) = Fix(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})$$

(le transforme d'un ensemble de points fixes d'une bijection est l'ensemble des points fixes de la conjuguee de cette bijection.)

2. Utiliser ceci pour retrouver le fait que le conjugue d'une rotation (resp. symetrie) par une isometrie lineaire quelconque est une rotation (resp. symetrie)

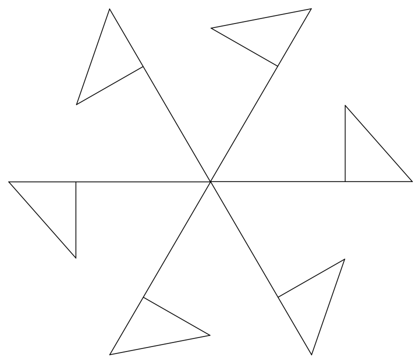

FIGURE 1 – Figure F

Exercice 5. On considere la figure $F \subset \mathbb{R}^2$ ci-dessus (centree en l'origine et reunion des segments noirs).

1. Montrer que $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_F \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des isometries φ telles que
$$\varphi(F) = F$$
est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_0$.
2. Donner les expressions de six matrices orthogonales dont les isometries associees sont contenues dans $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_F$.
3. Montrer que $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)_F$ est precisement constitue de ces six isometries. On pourra pour cela utiliser le fait (apres l'avoir montre) qu'une isometrie lineaire-qui laisse invariant deux points non alignes avec l'origine est l'identite ainsi que le fait qu'une isometrie transforme un segment en un autre segment et envoie les extremites sur les extremite et le milieu sur le milieu.