EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 6

Dans tous ses exercices on pourra travailler soit en terme de matrices soit en termes de nombres complexes, soit les deux comme on prefere ou comme c'est le plus rapide.

Par ailleurs si on le souhaite on pourra representer un angle par un vecteur ou un nombre complexe : si un angle est defini par une rotation r dont les cosinus et sinus sont (c, s) on pourra parler soit de l'angle r, soit de l'angle (c, s) soit de l'angle $\mathrm{c} + i\mathrm{s}$.

Exercice 1. Montrer (avec le moisn de calculs possible) que si s est une symetrie affine et φ une isometrie quelconque, l'isometrie conjuguee

$$\varphi \circ s \circ \varphi^{-1}$$

est axiale ou glissee si et seulement si s est axiale ou glissee.

Exercice 2. Montrer la formule du produit scalaire : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nul et $r = \widehat{\vec{u}\vec{v}}$ leur angle alors on a

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos(r)$$

Exercice 3. Soit $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ trois points non-alignes. Montrer que la "somme" des angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ $\widehat{BCA}$ vaut $-\mathrm{Id}$ (on note $\widehat{ABC}$ l'angle entre $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$.)

Exercice 4. Soit $r,' r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ deux rotations (lineaires) et $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$ une symetrie (lineaire.) Donner une expression simple de

$$\mathrm{Ad}(r')(r) = r' \circ r \circ r'^{-1} \text{ et } \mathrm{Ad}(s)(r) = s \circ r \circ s^{-1}$$

en fonction de r (passer aux matrices ou aux nombres complexes).

Exercice 5. 1. Montrer que les isometries affines preservent les angles au sens suivant : soient $P \neq Q$ et $R \neq S$ des points du plan et soit ϕ une isometrie et

$$P' = \phi(P),\ Q' = \phi(Q), \cdots$$

les image de ces points par ϕ, alors on a

$$\widehat{\overrightarrow{P'Q'}\overrightarrow{R'S'}} = \pm\widehat{\overrightarrow{PQ}\overrightarrow{RS}}$$

ou ± 1 depend de ce que ϕ est une rotation ou une symetrie.

On pourra utiliser la relation

$$\overrightarrow{P'Q'} = \phi_0(\overrightarrow{PQ}) \tag{0.1}$$

ou ϕ_0 designe la partie lineaire et utiliser l'exercice precedent.

Exercice 6. Soit $r_{\alpha,\mu}$ et $s_{\beta,\nu}$ des isometries affines (rotation et symetrie) associees aux parametres complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^1, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

1. Exprimer les application reciproques

$$r_{\alpha,\mu}^{-1},\ s_{\beta,\nu}^{-1}$$

en fonction de ces parametres.

2. Calculer les parametres de la conjuguee

$$r_{\alpha,\mu} \circ s_{\beta,\nu} \circ r_{\alpha,\mu}^{-1};$$

interpreter geometriquement le resultat.

Exercice 7. (Angle moitie) Soit r une rotation (possiblement affine) montrer qu'il existe exactement deux rotations $r_{\pm}^{1/2}$ solutions de l'equation d'inconnue R

$$R^2 = r.$$

(on donnera les cosinus et sinus de ces rotations en fonction de ceux de r). On commencera par chercher les parties lineaires des solutions et on s'interessera ensuite au centre. On pourra travailler avec les nombres complexes si on le souhaite.

Exercice 8.

1. Montrer que la composee de deux symetries affines est une rotation dont l'angle est le "double" de l'angle entre les deux axes des parties lineaires (le "double" d'un angle signifie le carre de la rotation correspondante).
2. Que ce passe-t-il si les droites sont paralleles ?
3. Que dire du centre, si les symetries sont axiales d'axes non-paralleles ?

Exercice 9. Soient les symetries s_1, s_2 par rapport aux droites d'equation :

$$3x + 4y = 2,\ -2x + 5y = 3.$$

1. Quelle est la composee $s_1 \circ s_2$? Donner ses parametres complexes ainsi que l'ensemble de ses points fixes.
2. Meme question pour les droites

$$3x + 4y = 2,\ 6x + 8y = 6.$$

Exercice 10. On considere la transformation

$$\phi(x,y) = (X,Y)$$

avec

$$X = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1. \; Y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$$

1. Quelle est la nature de ϕ ?
2. Quels sont ses points fixes.
3. Quelle est la nature de ϕ^6 (on commencera par calculer la partie lineaire) ?

Exercice 11. On considere les transformations

$$\phi_1(x,y) = (y+1, x+1)$$

$$\phi_2(x,y) = (y+1, x-1)$$

1. Quelle est la nature de ϕ_1 et de ϕ_2 ?
2. Quels sont leurs points fixes respectifs.
3. Calculer ϕ_1^2 et ϕ_2^2.
4. Que valent ϕ_1^{2n} et ϕ_2^{2n} pour $n \in \mathbb{Z}$?