EPFL
Géométrie I, MATH-120

Lundi 22.01.2017 de 16h15 à 19h15

Examen

Nom : Prenom : No SCIPER :

Consignes :

- **Indiquer votre nom et/ou numero SCIPER sur chaque feuille de votre copie et les numeroter.**
- **Utiliser une nouvelle feuille pour chaque nouvel exercice.**
- **A la fin de l'examen retourner votre copie dans la feuille A3 pliée.**
- **Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées.**
- **Le formulaire standard est autorisé.**
- **Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.**
- **Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.**
- **Dans tout le texte, "symétrie" signifie "symétrie orthogonale".**
- **Sauf mention explicite du contraire les angles seront représentés sous forme de nombres complexes de modules 1.**
- **L'examen est long mais il n'est pas nécéssaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.**

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Soit G un groupe et $A \subset G$ un ensemble. Donner une définition du sous-groupe engendré par A dans G, $\langle A \rangle \subset G$.
2. Dire si ces affirmations sont vraies ou fausses (donner les réponses sur votre copie et pas sur le texte de l'examen) :
   (a) Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes et $A \subset G$ qui engendre G. On suppose que $A \subset \ker \varphi$ alors $\forall g \in G$, $\varphi(g) = e_H$.
   (b) La conjuguée $r \circ s \circ r^{-1}$ d'une symétrie axiale (affine) par une rotation (affine) est une symétrie axiale (affine).
   (c) La composée $r \circ s$ d'une rotation (affine) et d'une symétrie axiale (affine) est une symétrie axiale (affine).
   (d) L'application affine
   $$\varphi(x,y) = (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1)$$
   est une symétrie glissée.

Exercice 2. Soit s la symétrie d'axe la droite d'équation $2x + y = 1$ et s' celle d'équation $x + 3y = 2$

1. Quel est l'angle (exprimé en terme de complexes) entre les deux droites ci-dessus ?
2. Quelle est la nature de l'isométrie $\varphi = s' \circ s$ et quels sont ses éléments caractéristiques (points fixes, etc...) et donner l'expression de φ sous forme de transformation sur les complexes.
3. Même question pour φ^{2018}.

Exercice 3. Soit s la symétrie affine definie par

$$s(x,y) = (-\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1, -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 1)$$

1. Donner une équation de l'axe de la partie linéaire s_0.
2. Ecrire s comme la composée $t \circ s'$ ou s' est une symétrie axiale et t une translation de vecteur parallele a l'axe de s.
3. Calculer les paramètres complexes de s^{2018}.

Groupes finis de transformations affines

On note

$$T(\mathbb{R}^2) = \{t_{\vec{u}},\ \vec{u} \in \mathbb{R}^2\}$$

le groupe des translation de $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ le groupe des applications linéaires inversibles (ce groupe s'identifie au groupe des matrices 2×2 inversibles

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \det(M) = ad - bc \neq 0\}.$$

Une transformation affine du plan $\mathbb{R}^2$ est une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$$

où $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ est une application linéaire inversible et $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$: pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{u} + \varphi_0(\vec{x}).$$

On note $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Bij}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des applications affines. Cet ensemble forme un groupe (admis) qui d'ailleurs contient le groupe des isométries du plan $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ comme sous-groupe (cf. le cours).

Le but des deux exercices suivants est de montrer le

Théorème 1. *Soit $G \subset \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2)$ un groupe fini de transformations affines d'ordre $|G|$ impair, alors G est cyclique.*

Exercice 4.

1. Montrer que le Théorème est vrai si on suppose que $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ (ie. si G est un sous-groupe d'isométries). La stratégie de la preuve consiste à ce ramener au cas des groupes d'isométries.
2. Montrer que $T(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\}$ et en déduire que la décompositon d'une transformation affine φ sous la forme

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \varphi_0$$

   est unique. L'application linéaire φ_0 s'appelle la partie linéaire de φ.
3. Montrer que $T(\mathbb{R}^2)$ est distingué dans $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2)$.
4. Montrer que l'application "partie linéaire"

$$\mathrm{lin} : \begin{array}{ccc} \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2) & \mapsto & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_0 \end{array}$$

   est un morphisme de groupes dont le noyau est $T(\mathbb{R}^2)$.

5. Soit G un groupe fini de transformation affines. Montrer que $T(\mathbb{R}^2) \cap G = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\}$.
6. On note $G_0 = \mathrm{lin}(G)$ l'image du groupe G par le morphisme "partie linéaire". Montrer que $\mathrm{lin} : G \to G_0$ est un isomorphisme.

Exercice 5. La dernière question de l'exercice précédent ramène donc la preuve du Théorème 1 au cas ou $G = G_0$ est un groupe fini d'applications linéaires. Dans cet exercice, on va montrer que G est isomorphe a un groupe d'isométries linéaires ce qui permettra de conclure.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_0 = xx' + yy'.$$

On se donne donc $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ un groupe fini d'applications linéaires et on suppose que son ordre $|G|$ est impair.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in G$, $\det(\varphi)^{|G|} = 1$ et en déduire que $\det \varphi = 1$.
2. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule suivante :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi' \in G} \langle \varphi'(\vec{u}), \varphi'(\vec{v}) \rangle.$$

   Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, c'est à dire est
   — Symétrique,
   — Bilinéaire,
   — Positif-Défini.
3. Ces propriétés impliquent (on l'admet) que $\mathbb{R}^2$ possede une base $\mathcal{B}_G = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_G = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle_G = 1,\ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_G = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle_G = 0.$$

   Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on note (x, y), (x', y') les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}_G$: $\vec{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, $\vec{v} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$. Montrer que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G = \langle (x, y), (x', y') \rangle_0$$

4. Montrer que pour tout $\varphi \in G$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle_G = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_G.$$

5. Pour $\varphi \in G$ on note M_φ la matrice de l'application linéaire φ dans la base $\mathcal{B}_G = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Montrer que M_φ est la matrice d'une isométrie (pour le produit scalaire usuel).
6. Montrer que le groupe G est isomorphe a un groupe d'isométrie de $\mathbb{R}^2$ (pour le produit scalaire usuel).
7. Conclure la preuve du Théorème 1.