EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 9

Exercice 1. Soit $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble du plan (une "figure"). Le groupe d'isometries de $\mathbf{P}$, est l'ensemble

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2),\ \varphi(\mathbf{P}) = \mathbf{P}\} \text{ avec } \varphi(\mathbf{P}) = \{\varphi(P),\ P \in \mathbf{P}\}.$$

c'est a dire l'ensemble des isometries laissant $\mathbf{P}$ globalement invariant.

1. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ est un groupe.
2. Soit $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, et $\psi(\mathbf{P})$ l'image de $\mathbf{P}$ par cette isometrie. Calculer $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\psi(\mathbf{P})}$ en fonction de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ et ψ.

Exercice 2. Soit un polygone generalise

$$\mathbf{P} = \bigcup_{i=1\cdots n} [P_i P_{i+1}]$$

avec

$$P_1, \cdots, P_n,\ P_{n+1} = P_1.$$

— Montrer que si φ est une isometrie alors $\varphi(\mathbf{P})$ est un polygone generalise.
— Meme question pour un polygone non-croise.
— Montrer que ces enonces restent vrai si φ est seulement une application affine (inversible.)

Exercice 3 (Un processus de moyenne)**.** Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ un groupe fini d'isometries et $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble quelconque de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que le groupe d'isometries de l'ensemble

$$G(\mathbf{P}) := \bigcup_{g \in G} g(\mathbf{P}),\ \text{avec } g(\mathbf{P}) = \{g(P),\ P \in \mathbf{P}\}$$

contient G.

2. Quel est la structure du groupe d'isometries de la figure ci-dessus ?
3. Donner les parametres complexes de ses differents elements.
4. Au vu le la premiere question donner un sous-ensemble strict de cette figure a partir de laquelle elle a ete construite ?

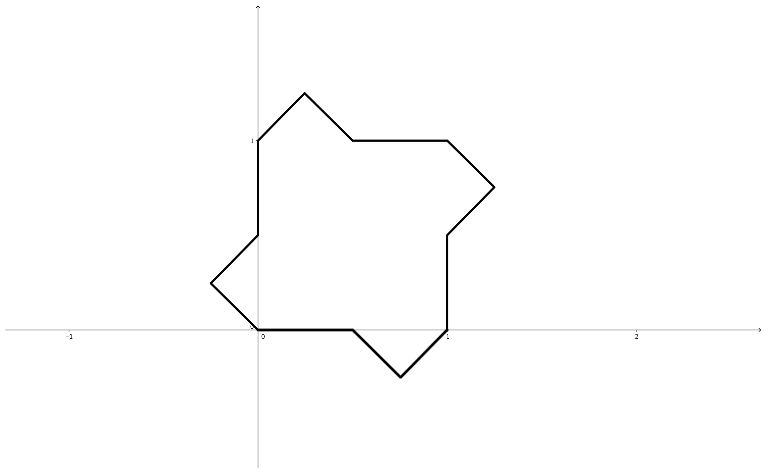

FIGURE 1 – Quel est mon groupe d'isometries I ?

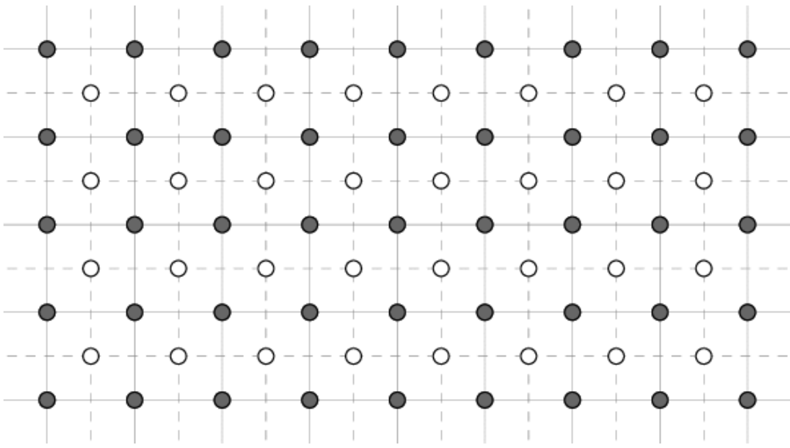

FIGURE 2 – Quel est mon groupe d'isometries II ?

Exercice 4. On considere la "figure" 2, ou les points noirs sont situe au points de coordonnees entieres et les blancs sur les points de coordonnees demi-entieres et le point noir central est l'origine du plan.

Soit G le groupe d'isometries de cette figure. On note

$$T(G) = T(\mathbb{R}^2) \cap G$$

le sous-groupe des translations de G et

$$G_0 = G \cap \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$$

le sous-groupe des isometries lineaires.

1. Determiner $T(G)$ (en l'identifiant a un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
2. Determiner les parametres complexes des elements de G_0^+.
3. Determiner les parametres complexes des elements de $G_0 - G_0^+$ (commencer par trouver le parametres d'un element et en deduire tous les autres avec la question precedente).
4. Montrer que tout element de G s'ecrit de maniere unique comme la compose d'un element de $T(G)$ et d'un element de G_0 et exprimer cet element comme transformations sur les nombres complexes.
5. Meme question si la figure est decalee de sorte que le point a l'origine est deplace au point de coordonnees $(1/4, 1/4)$ (utiliser l'Exercice 1 Q. 2).