EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 10

Exercice 1. Soit $\omega_3 = e^{i2\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et T_0 le triangle équilatéral $T_0 = [1, \omega_3, \omega_3^2]$.

1. Soit r la rotation de centre $(1,1)$ et d'angle i (ou $\pi/2$ si on préfère). Exprimer r sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes.
2. Soit T le transforme de T_0 par r. Donner les coordonnées des sommets de T.
3. Donner (sous forme complexe ou cartesienne) un élément du groupe des isométries de T qui n'est pas une rotation.
4. Combien ce groupe possede-t-il d'elements qui ne sont pas des rotations.

Exercice 2. (sur les Polygones reguliers generalises)

1. Le logo ci-dessous est le logo de la London Mathematical Society : qu'est ce qu'il represente geometriquement ? et en terme de groupes ?
2. Combien existe-t-il a isometrie pres de polygones generalises reguliers (croises ou non) a 10 cotes dont les sommets sont inscrits dans le cercle unite ?
3. Meme question pour 17 cotes ?

Exercice 3. Soit $n \geqslant 3$, α et un generateur de μ_n, montrer que si $|\alpha - 1|$ est minimal parmi toutes les differences $|\alpha' - 1|$ avec $\alpha' \in \mu_n - \{1\}-$, alors le polygone generalise regulier

$$\mathbf{P}_\alpha = [1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}]$$

est un "vrai" polygone (ie. n'est pas un polygone croise ; seuls ses cotes consecutifs ont une intersection non-vide) (regarder ou les droites portees par deux cotes distincts et non-consecutifs s'intersectent.)

Exercice 4. On note $\zeta_5 \neq 1$ une racine 5-ieme de l'unite differente de 1 : une solution de l'equation

$$X^5 - 1 = 0.$$

On ecrit

$$\zeta_5 = \mathrm{c}_5 + i\mathrm{s}_5$$

sa decomposition en partie reelle et imaginaire.

1. Montrer que ζ_5 est d'ordre 5 exactement.

2. Montrer que
$$\zeta_5^4 + \zeta_5^3 + \zeta_5^2 + \zeta_5 + 1 = 0.$$
3. Montrer que
$$\zeta_5^2 + \zeta_5^{-2} + \zeta_5 + \zeta_5^{-1} + 1 = 0.$$
et en deduire que
$$4\mathrm{c}_5^2 + 2\mathrm{c}_5 - 1 = 0.$$
Quelles sont les valeurs possibles de c_5 ?
4. On definit $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ comme etant la racine 5-ieme de l'unite differente de 1 dont la partie reelle est maximale (parmi tous les ζ_5) et la partie imaginaire est positive. Que vaut $e^{\frac{2\pi i}{5}}$?
5. Montrer que $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ est constructible a la regle et au compas et expliciter une telle construction.

Exercice 5. Expliquer pourquoi les dessins ci-dessous fournissent une construction a la regle et au compas du pentagone regulier.

Exercice 6. On se donne $\{0 = z_0, z_1 = 1, \cdots, z_n\}$ $n+1 \geqslant 2$ nombres complexes et on note $K_n = \mathbb{Q}(z_0, z_1, \cdots, z_n)$ l'ensemble des complexes formes par des fractions a coefficients rationels en $z_0, z_1, \cdots, z_n$ ie. l'ensemble des complexes de la forme
$$\frac{P(z_0, \cdots, z_n)}{Q(z_0, \cdots, z_n)}$$
ou P, Q sont des polynomes en $n+1$ variables a coefficients dans $\mathbb{Q}$ (c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\{0 = z_0, z_1 = 1, \cdots, z_n\}$).

1. Montrer que tout nombres complexe constructible a partir de $\{0 = z_0, z_1 = 1, \cdots, z_n\}$ est racine d'un polynome des degree $\leqslant 2$ a coefficients dans K_n.

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
150 YEARS

Figure 1 – Logo de la ...

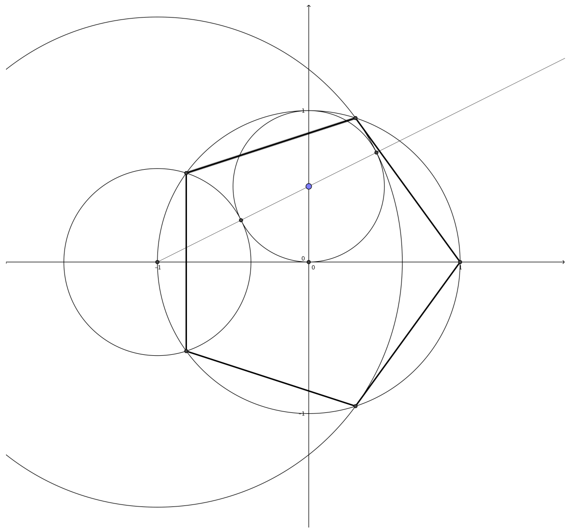

Figure 2 – Construction de Duerer du pentagone regulier

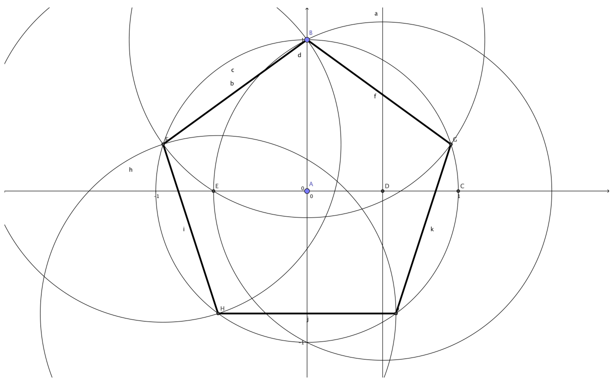

Figure 3 – Une autre Construction