EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 10

Exercice 1. Soit $\omega_3 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et T_0 le triangle équilatéral $T_0 = [1, \omega_3, \omega_3^2]$.

1. Soit r la rotation de centre $(1, 1)$ et d'angle i (ou $\pi/2$ si on préfère). Exprimer r sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes.
2. Soit T le transforme de T_0 par r. Donner les coordonnées des sommets de T.
3. Donner (sous forme complexe ou cartesienne) un élément du groupe des isométries de T qui n'est pas une rotation.
4. Combien ce groupe possede-t-il d'elements qui ne sont pas des rotations.

Solution

1. Le centre $(1, 1)$ est, dans la notation complexe, $z_0 = 1 + i$. Une rotation d'angle α selon un centre z_0 s'écrit comme

$$z \mapsto \alpha(z - z_0) + z_0$$

On voit que z_0 est le point fixe car

$$z_0 \mapsto \alpha(z_0 - z_0) + z_0 = 0 + z_0 = z_0.$$

Dans la notation $\alpha z + \mu$, on a $\mu = (1 - \alpha)z_0$. Par exemple, avec $\alpha = i$ et $z_0 = 1 + i$, la rotation r s'exprime comme $r(z) = \alpha z + \mu$ avec $\alpha = i$ et

$$\mu = (1 - \alpha)z_0 = (1 - i)(1 + i) = 2.$$

2. Les sommets de T_0 sont

$$1, \quad e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{4\pi i/3} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Appliquant $z \mapsto \alpha z + \mu = iz + 2$, on trouve les sommets de T :

$$2 + i, \quad , \frac{4 - \sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad \frac{4 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

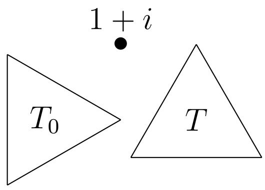

FIGURE 1 – Le triangle T_0 et sa rotation T

3. On a la conjugaison complex $c : z \mapsto \bar{z}$ comme isométrie de T_0 qui n'est pas une rotation. Pour convertir cela en isométrie de T, on prend rcr^{-1}. Nous nous souvenons de l'exercice 2, Série 9 : les isométries d'une figure $\psi(\mathbf{P})$ sont de la forme $\psi g \psi^{-1}$, g étant une isométrie de $\mathbf{P}$. Pour une rotation quelconque, on a
$$z \overset{r^{-1}}{\to} \bar{\alpha}z - \bar{\alpha}\mu \overset{c}{\to} \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\mu} \overset{r}{\to} \alpha^2\bar{z} - \alpha^2\bar{\mu} + \mu.$$
Avec $\alpha = i$ et $\mu = 2$, on a $rcr^{-1}(z) = -\bar{z} + 4$.
4. Trois : l'exemple de 3, et les deux autre symétries dans les axes passant par les autres sommets de T.

Exercice 2. (sur les Polygones reguliers generalises)

1. Le logo ci-dessous est le logo de la London Mathematical Society : qu'est ce qu'il represente geometriquement ? et en terme de groupes ?
2. Combien existe-t-il a isometrie pres de polygones generalises reguliers (croises ou non) a 10 cotes dont les sommets sont inscrits dans le cercle unite ?
3. Meme question pour 17 cotes ?

Solution.

1. Le logo est un décagone croisé. En terme de groupes, ses isométries forment un groupe dihédrale D_{10} (dix rotations et dix symétries).
2. Il y a deux : le décagone et le logo de la London Math Soc. Par une rotation, on peut poser 1 un des sommets et ses rotations $e^{2\pi i/10}, \ldots, e^{9\times 2\pi i/10}$ les autres. Les côtés pourraient joindre 1 à $e^{k\times 2\pi i/10}$, mais le resultat n'est pas un décagone si k et 10 ont un facteur en commun. Par exemple, si $k = 5$ on a cinq segments $[0, 5], [2, 6], [3, 8], [4, 9]$ au lieu d'un seul polygone. On a deux pentagones si $k = 2$ ou 8, ou deux pentagrames si $k = 4$ ou 6. Si $k = 1$, on a le décagone ordinaire, et le même décagone à isométrie près si $k = 9$. Si $k = 3$ ou 7, on a le logo LMS.
3. Pour 17 côtés au lieu de $10 = 2 \times 5$, on a huit polygones à isométrie près parce que 17 est un nombre premier, donc les pairs $k = 1, 16$, $k = 2, 15$, $k = 3, 14$, $k = 4, 13$, $k = 5, 12$, $k = 6, 11$, $k = 7, 10$ et $k = 8, 9$ donnent tous des polygones à 17 côtés.

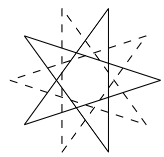

FIGURE 2 – Le cas $k = 4$ (ou, également, $k = 6$)

Exercice 3. Soit $n \geqslant 3$, α et un generateur de μ_n, montrer que si $|\alpha - 1|$ est minimal parmi toutes les differences $|\alpha' - 1|$ avec $\alpha' \in \mu_n - \{1\}-$, alors le polygone generalise regulier

$$\mathbf{P}_\alpha = [1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}]$$

est un "vrai" polygone (ie. n'est pas un polygone croise ; seuls ses cotes consecutifs ont une intersection non-vide) (regarder ou les droites portees par deux cotes distincts et non-consecutifs s'intersectent.)

Solution.

Les droites portées par deux côtés distincts et non-consecutifs s'écrivent comme

$$\begin{aligned} &(1-s)\alpha^k + s\alpha^{k+1}, \quad s \in \mathbb{R} \\ &(1-t)\alpha^l + s\alpha^{l+1}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où $0 \leqslant k \neq l \leqslant n-1$. L'intersection se simplifie si on introduit $m = k - l$:

$$1 - t + t\alpha = (1-s)\alpha^m + s\alpha^{m+1}.$$

On a donc

$$\alpha^m - 1 = (\alpha - 1)\frac{t-s}{1-s+s\alpha}.$$

Si $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, ça donnerait $|\alpha^m - 1| < |\alpha - 1|$, mais on a choisit α le plus proche de 1 que possible. Donc l'intersection tombe dehors du polygone. C'est à dire qu'il n'y a aucun croisement.

Exercice 4. On note $\zeta_5 \neq 1$ une racine 5-ieme de l'unite differente de 1 : une solution de l'equation

$$X^5 - 1 = 0.$$

On ecrit

$$\zeta_5 = \mathrm{c}_5 + i\mathrm{s}_5$$

sa decomposition en partie reelle et imaginaire.

1. Montrer que ζ_5 est d'ordre 5 exactement.

2. Montrer que
$$\zeta_5^4 + \zeta_5^3 + \zeta_5^2 + \zeta_5 + 1 = 0.$$
3. Montrer que
$$\zeta_5^2 + \zeta_5^{-2} + \zeta_5 + \zeta_5^{-1} + 1 = 0.$$
et en deduire que
$$4\mathrm{c}_5^2 + 2\mathrm{c}_5 - 1 = 0.$$
Quelles sont les valeurs possibles de c_5 ?
4. On definit $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ comme etant la racine 5-ieme de l'unite differente de 1 dont la partie reelle est maximale (parmi tous les ζ_5) et la partie imaginaire est positive. Que vaut $e^{\frac{2\pi i}{5}}$?
5. Montrer que $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ est constructible a la regle et au compas et expliciter une telle construction.

Solution.

1. On a $\zeta^5 = 1$ par définition de $\zeta = \zeta_5$ (on écrit ζ au lieu de ζ_5 pour éviter les souscrits). Il faut montrer que 5 est l'exposant k le plus petit tel que $\zeta^k = 1$. Posons $\zeta^k = 1$ avec $k > 0$ minimal. On divise 5 par k pour écrire $5 = qk + r$ avec un reste $0 \leqslant r < k$. Donc
$$1 = \zeta^5 = (\zeta^k)^q \zeta^r = \zeta^r.$$
Parce que $r < k$ et k est l'exposant minimal tel que $\zeta^k = 1$, on a $k = 0$. C'est à dire que $5 = qk$. Mais 5 est un nombre premier, alors on a $k = 5$ ou $k = 1$. Le cas $k = 1$ est impossible parce que $\zeta \neq 1$, alors $k = 5$. On a montré que ζ_5 est d'ordre 5 exactement.
2. On a la factorisation
$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$
Une solution de $x^5 - 1 = 0$ doit vérifier $x = 1$ ou $x^4 + x^3 + x^2 + 1$. Parce que $\zeta^5 = 1$ et $\zeta \neq 1$, on a donc $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$.
3. Par l'exercice précédent, on a $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$. En divisant par ζ^2, on trouve
$$\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0.$$
Si $\zeta = c + is$ avec $c^2 + s^2 = 1$, on a
$$\zeta^{-1} = c - is, \zeta^2 = c^2 - s^2 + i(2cs), \zeta^{-2} = c^2 - s^2 - i(2cs).$$
Donc
$$\begin{aligned} 0 &= \zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} \\ &= 2(c^2 - s^2 + c) + 1 \end{aligned}$$

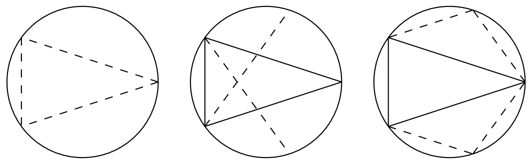

FIGURE 3 – Construction d'Euclide

En utilisant $s^2 = 1 - c^2$, on peut écrire cela comme $4c^2 + 2c - 1 = 0$. Les valeurs possibles de c sont

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

4. Il faut prendre $c = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ pour avoir la partie réelle maximale parmi tous les choix de $\zeta = c + is$. La partie imaginaire est $s = \pm\sqrt{1-c^2}$, et on prend la racine positive :

$$s = \sqrt{1-c^2} = \sqrt{1 - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{16}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

L'exponentielle $e^{2\pi i/5}$ vaut

$$e^{2\pi i/5} = c + is = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

5. Par règle et compas, on peut construire la droite entre deux pointes données et le cercle d'un centre et rayon donné. Donc les constructions sagissent de prendre l'intersection des droites et des cercles, c'est à dire de résoudre des équations quadratiques avec des coefficientes déja construites. De cette manière algébrique, on voit que $c + is$ est constructible en deux étapes.
Plus precisement on construit $\sqrt{5}$ comme etant la longueur du segment $[(0,0),(2,1)]$ et on construit $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. On obtient alors s en prenant l'intersection du cercle unite avec la droite verticale passant $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et en choisissant le point d'ordonnee positive.
Pour un argument géométrique, on a la démonstration classique d'Euclide (livre IV, proposition XI). Donné un cercle, construit d'abord un triangle isoscèle inscrit dans le cercle et avec un angle la moitié des deux autres (utilisant une proposition précédente dans l'exposition d'Euclide). Le cercle et les bisecteurs des deux angles les plus grands intersectent en deux points. Avec les troix sommets du triangle, ces deux points complètent le pentagone.

Exercice 5. Expliquer pourquoi les dessins ci-dessous fournissent une construction a la regle et au compas du pentagone regulier.

Sans expliquer la validite de la construction voici dans quel ordre elles sont faites :

1. Construction de Duerer : Tracer le cercle unite. Tracer la droite passant par $(-1, 0)$ et le milieu $(0, 1/2)$. Tracer le cercle centre en $(0, 1/2)$ et passant par l'origine ; noter les deux intersections de ce cercle avec la droite precedente. Tracer les deux cercles centres en $(-1, 0)$ et passant par les deux intersections precedentes. L'intersection de ces deux cercles avec le cercle unite fournissent 4 des 5 somments du pentagone regulier.
2. Autre construction : tracer le cercle unite. tracer le cercle centre en $(1/2, 0)$ et passant par $(0, 1)$. Noter les deux intersections de ce dernier avec l'axe reel et garder celle qui est contenue dans le cercle unite. Tracer le cercle centre en $(0, 1)$ et passant par cette derniere intersection. Elle intersecte le cercle unite en deux sommets du pentagone regulier dont un sommet les $(0, 1)$. Tracer les deux autres sommets sur le cercle unite en reportant la longueur d'un cote a partir d'un sommet deja trace.

Exercice 6. On se donne $\{0 = z_0, z_1 = 1, \cdots, z_n\}$ $n + 1 \geqslant 2$ nombres complexes et on note $K_n = \mathbb{Q}(z_0, z_1, \cdots, z_n)$ l'ensemble des complexes formes par des fractions a coefficients rationels en $z_0, z_1, \cdots, z_n$ ie. l'ensemble des complexes de la forme

$$\frac{P(z_0, \cdots, z_n)}{Q(z_0, \cdots, z_n)}$$

ou P, Q sont des polynomes en $n+1$ variables a coefficients dans $\mathbb{Q}$ (c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\{0 = z_0, z_1 = 1, \cdots, z_n\}$).

1. Montrer que tout nombres complexe constructible a partir de $\{0 = z_0, z_1 = 1, \cdots, z_n\}$ est racine d'un polynome des degree $\leqslant 2$ a coefficients dans K_n.

LONDON
MATHEMATICAL
SOCIETY
150 YEARS

FIGURE 4 – Logo de la ...

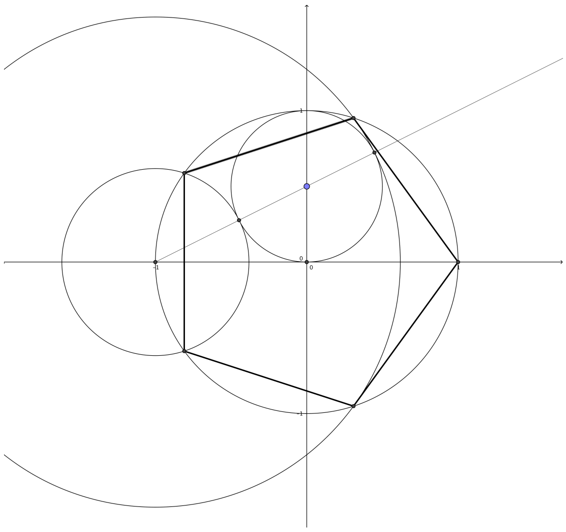

FIGURE 5 – Construction de Duerer du pentagone regulier

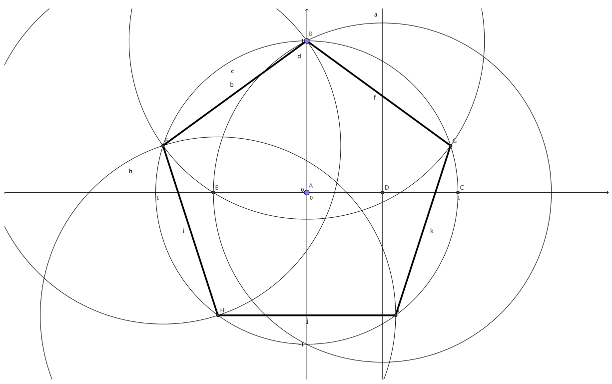

FIGURE 6 – Une autre Construction