EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 11

Exercice 1. On considere une application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \mapsto & X \\ (g,x) & \mapsto & g \odot x \end{array}$$

verifiant

$$\forall x \in X,\ e_G \odot x = x$$

$$\forall g, g' \in G, x \in X,\ g \odot (g' \odot x) = (g.g') \odot x.$$

1. Construire a partir de cette donnee une action a gauche de G sur X (definie comme un morphisme de G vers $\mathrm{Bij}(X)$.

Exercice 2. Soit $\mathrm{a}_l : G \mapsto \mathrm{Bij}(X)$ une action a gauche de G sur X,

1. Montrer que l'application

$$g \in G \mapsto \mathrm{a}_l(g^{-1}) \in \mathrm{Bij}(X)$$

definit une action a droite de G sur X.

2. Soit ad : $G \mapsto \mathrm{Bij}(X)$ une action a droite de G sur X, montrer que l'application

$$g \in G \mapsto \mathrm{a}_r(g^{-1}) \in \mathrm{Bij}(X)$$

definit une action a gauche de G sur X.

Exercice 3 (Processus de linearisation)**.** Soit $G \circlearrowright X$ notee

$$\mathrm{a}_l(g)(x) = g.x$$

une action a gauche, k un corps et

$$\mathcal{F}(X;k) = \{\varphi : X \mapsto k\}$$

le k-espace vectoriel des fonctions sur X a valeurs dans k.

A tout $g \in G$ et toute fonction $\varphi : X \mapsto k$ on associe la nouvelle fonction $\varphi_{|g} : X \mapsto k$ definie par

$$\forall x \in X, \varphi_{|g}(x) := \varphi(g.x).$$

1. Montrer que l'application $\cdot_{|g} : \varphi \mapsto \varphi_{|g}$ est un automorphisme k-lineaire de $\mathcal{F}(X;k)$ (une application k-lineaire inversible)
2. Montrer que l'application
$$g \in G \mapsto \cdot_{|g} \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{F}(X;k))$$
definit une action a droite de G sur $\mathcal{F}(X;k)$ (ie $.\mathcal{F}(X;k) \circlearrowleft G$) par automorphisme k-lineaire.
3. Montrer que
$$g \in G \mapsto \cdot_{|g^{-1}} \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{F}(X;k))$$
definit une action a gauche $G \circlearrowright \mathcal{F}(X;k)$.

Remarque 0.1. On voit par cet construction que etant donne l'action d'un groupe sur un ensemble absolument quelconque (sans structure apriori), il est toujours possible de construire a partir de cela une action lineaire sur un espace intimement associe a X. En particulier on peut appliquer des methodes d'algebre lineaire (reduction des endomorphismes) pour obtenir des renseignement sur cette action.

On appelle cela un processus de linearisation.

Exercice 4. Soit $G \circlearrowright X$ une groupe agissant a gauche sur X ; soit H un autre groupe et $\varphi : H \to G$ un morphisme de groupe. Construire une action a gauche de H sur X.

Exercice 5. Soit G un groupe. Montrer que

1. L'application de translation a gauche
$$\begin{array}{ccc} G \times G & \mapsto & G \\ (g,x) & \mapsto & g.x \end{array}$$
defini une action a gauche fidele de G sur G. Montrer qu'en general cette action n'est PAS par morphismes de groupes.
2. L'application de translation a droite
$$\begin{array}{ccc} G \times G & \mapsto & G \\ (x,g) & \mapsto & x.g \end{array}$$
defini une action a droite de G sur G. Quel est son noyau ? Montrer qu'en general cette action n'est pas par morphismes de groupes.
3. L'application de conjugaison
$$\begin{array}{ccc} G \times G & \mapsto & G \\ (g,x) & \mapsto & \mathrm{Ad}(g)(x) = g.x.g^{-1} \end{array}$$
defini une action a gauche de G sur G. Quel est son noyau ? Quand est-ce-que cette action est triviale ? Montrer que cette action se fait par morphismes de groupes.

Exercice 6 (Les transformations de Moebius)**.** Soit

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y > 0\} \subset \mathbb{C}$$

l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire positive : $\mathbb{H}$ s'appelle le demi-plan de Poincare. Soit

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ ad - bc > 0\}$$

l'ensemble des matrices 2×2 de determinant strictement positif.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ forme un groupe pour la multiplication des matrices.
2. Soit $\gamma \in G$ et $z \in \mathbb{H}$, montrer que

$$\gamma.z := \frac{az + b}{cz + d}$$

   appartient a $\mathbb{H}$.
3. Verifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \times \mathbb{H} & \mapsto & \mathbb{H} \\ (\gamma, z) & \mapsto & \gamma.z \end{array}$$

   defini une action a gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ sur $\mathbb{H}$.
4. Montrer que le noyau de cette action est le groupe des matrices scalaires (non-nulles).

Remarque 0.2. Les transformations du demi-plan de Poincare

$$z \mapsto g.z = \frac{az + b}{cz + d}$$

sont appelees *homographies* ou encore *transformations de Moebius* et sont les isometries du demi-plan de Poincare quand celui ci est muni de la *distance hyperbolique*. Cette action par homographie forme la base de la *geometrie hyperbolique* et joue un role fondamental en geometrie, theorie des groupes et theorie des nombres. On la retrouve egalement dans certain dessins de E.C. Escher.

Je vous encourage fortement a aller regarder le tres joli film de Arnold et Rognes (lien sur la page suivante) qui explique les homographies a partir de la geometrie euclienne mais en dimension 3 !

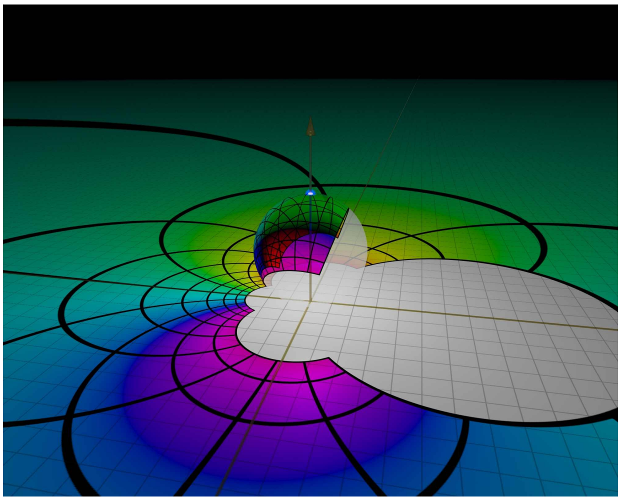

FIGURE 1 – Moebius trasformation revealed: un film de D. Arnold et J. Rognes.