EPFL Printemps 2019
Geometrie, MATH-125

Série 1

Un G-ensemble (a gauche) $(X, \mathrm{a}_{lX}) = (X, \odot)$ est un ensemble muni d'une action a gauche du groupe G (on note cette action $\mathrm{a}_{lX}(g)(x) = g \odot x$ pour $x \in X$ et $g \in G$).

Il est naturel de considerer l'ensemble de tous les G-ensemble (a gauche) : on parle alors de "categorie" des G-ensembles et il est alors necessaire de regarder egalement les morphismes compatibles avec cette structure :

Définition 1. *Un morphisme de G-ensembles*

$$\phi : (X, \odot) \to (Y, \otimes)$$

(a gauche) de – encore appele "application d'entrelacement"– est une application

$$\phi : X \mapsto Y$$

qui est compatible avec les structures de G-ensemble de X et Y : elle satisfait

$$\forall g \in G,\ \forall x \in X,\ \phi(g \odot x) = g \otimes \phi(x).$$

De maniere equivalente on a pour tout $g \in G$

$$\varphi \circ \mathrm{a}_{l,X}(g) = \mathrm{a}_{l,Y} \circ \varphi(g)$$

ou $\mathrm{a}_{l,X}$ et $\mathrm{a}_{l,Y}$ designent respectivement les applications de G dans $\mathrm{Bij}(X)$ et $\mathrm{Bij}(Y)$ qui definissent ces actions.

On notera $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de G-ensembles de X vers Y. Si ϕ est bijectif on dira que ϕ est un isomorphisme (ou un homeomorphisme) de G-ensembles. Si $Y = X$ on parlera d'endomorphisme ou d'automorphisme de G-ensembles...

Exercice 1. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de G-ensembles.

1. Montrer qu'il existe une unique application

$$\overline{\phi} : G\backslash X \to G\backslash Y$$

entre les espaces d'orbites de X et de Y verifiant

$$\forall x \in X,\ \overline{\phi}(G.x) = G.\phi(x).$$

2. Montrer que si ϕ est un isomorphisme alors $\overline{\phi}$ est une bijection.

Exercice 2. Soit G un groupe et X, Y deux G-ensembles (a gauche). Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme de G-ensembles. Montrer que si φ est bijectif alors l'application reciproque $\varphi^{-1} : Y \to X$ est egalement un morphisme de G-ensembles.

Exercice 3 (Un raffinement du Thm. Orbite-Stabilisateur)**.** Soit X un G-ensemble et $x \in X$, $G.x$ l'orbite de x sous l'action de G et G_x le stabilisateur de x sous l'action de G. Le Thm. Orbite-Stabilisateur dit qu'on a une bijection

$$G.x \simeq G/G_x$$

(G/G_x est l'ensemble des orbites de G sous l'action par multiplication a droite de G_x.)

1. Montrer que G/G_x admet une structure naturelle de G-ensemble a gauche qui fait de la bijection precedente un isomorphisme de G-ensembles.

Exercice 4. Montrer que l'application decrite dans le Thm 1.8 du cours est une bijection entre

1. L'ensemble des morphismes $\phi_H : G/H \to G'$.
2. L'ensemble des morphismes $\phi : G \to G'$ tels que $H \subset \ker(\phi)$.

Exercice 5. Soient $H, K \lhd G$ des sous-groupes normaux de G. Montrer que si $K \subset H$, il existe un morphisme de groupe surjectif

$$\mathrm{red}_{K,H} : G/K \mapsto G/H.$$

(donner une preuve utilisant le Thm 1.8 et donner une preuve directe)

Exercice 6. Soit G un groupe. Soient $g, h \in G$ le commutateur de g et h est l'element

$$[g, h] = g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$

1. Montrer que
$$[g, h] = e_G \iff g.h = h.g \iff [h, g] = e_G.$$
2. Montrer que le centre de G, $Z(G)$ est l'ensemble des $z \in G$ tels que
$$\forall g \in G, [g, z] = e_G.$$
3. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique (cad engendre par un seul element) alors G est abelien.

4. Le sous-groupe derive de G, est le sous-groupe engendre par l'ensemble de commutateurs de G,
$$D(G) = \langle [g,h],\ g,h \in G \rangle.$$
Montrer que $D(G) \triangleleft G$ et que $G/D(G)$ est abelien (montrer par le calcul que le conjugue d'un commutateur est un commutateur).
5. Soit $K \subset G$ un sous groupe. Montrer que
$$K \text{ est distingue et } G/K \text{ est abelien } \iff D(G) \subset K.$$
(on observera que si K est distingue, on a $[g.K, h.K]_{G/K} = [g,h]_G.K$).

Remarque 1. En particulier $G/D(G)$ se surjecte sur tout groupe quotient G/K qui est abelien (Exercice precedent). Pour faire court, on dit que $G/D(G)$ est le plus grand quotient abelien de G.

Exercice 7. Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier et G le groupe fini d'ordre p et d'élément neutre noté e_G.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de cardinal $a \geqslant 1$, on note
$$\mathcal{F}(G, \mathcal{A}) = \{f : g \in G \mapsto f(g) \in \mathcal{A}\}$$
l'ensemble des fonctions de G à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Pour tout $h \in G$ et toute fonction $f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ on définit la fonction $h \star f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ par
$$h.f : g \mapsto (h \star f)(g) := f(g.h).$$

1. Montrer que $(h, f) \mapsto h \star f$ définit une action à gauche de G sur $\mathcal{F}(G, \mathcal{A})$.
2. Montrer que si $h \in G$ n'est pas l'élément neutre alors h est d'ordre p et qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$, qui est invariante sous l'action de h (ie. telle que $h \star f = f$) est constante.
3. En déduire le nombres d'orbites de l'action de G sur $\mathcal{F}(G, \mathcal{A})$.
4. En déduire le *petit Théorème de Fermat* : soit $p \geqslant 2$ premier, pour tout entier $a \geqslant 1$, $a^p - a$ est divisible par p.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de demontrer le Theoreme de Cauchy :

Soit G un groupe fini d'ordre n et $p \geqslant 2$ un nombre premier divisant n alors G admet un element g d'ordre p.

Pour cela on considere le groupe quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dont on notera les elements
$$\overline{m} = m \,(\mathrm{mod}\, p) = m + p\mathbb{Z}$$

et

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0=\{\overline{n}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\mapsto g(\overline{n})\in G,\ g(\overline{0}).g(\overline{1})\cdots g(\overline{p-1})=e_G\}\subset(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^G$$

l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a valeurs dans G et dont le produit de toutes les valeurs est egal a l'element neutre e_G.

1. Montrer que $|\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0|=|G|^{p-1}$.
2. Montrer que l'action par translations de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur lui-meme induit une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0$. Cette action est a gauche ou a droite, pourquoi ?
3. Montrer que les orbites de l' action $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\curvearrowright\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},G)_0$ sont de taille 1 ou p.
4. Montrer que les orbites qui sont de taille 1 sont exactement celles des fonctions constantes $\overline{n}\mapsto g$ avec $g\in G$ verifiant
$$g^p=e_G.$$
5. Donner un exemple d'une telle orbite.
6. A l'aide de la formule des classes montrer que le nombre d'orbites de taille 1 est divisible par p.
7. Montrer qu'il existe au moins deux telles orbites et que G possede au moins un element d'ordre p.

Remarque 2. Le Theoreme de Cauchy est le point fondamental de la preuve (par recurrence) du :

Théorème 1 (1er Theorem de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini d'ordre n, p un nombre premier divisant n et $v_p(n)$ la p-valuation de n ($v_p(n)\geqslant 1$ est l'exposant de la plus grand puissance de p divisant n, ce qu'on ecrit $p^{v_p(n)}\|n$, ie. $p^{v_p(n)}|n$ et $p^{v_p(n)+1}\nmid n$) alors G possede un sous-groupe P d'ordre exactement $p^{v_p(n)}$.*

Un tel sous-groupe est appele *p-groupe de Sylow de G* (ou simplement p-Syolw de G)et le 2eme Theorem de Sylow dit que tous les p-Sylows de G sont conjugues. Le troisieme Theorem de Sylow donne des informations sur le nombres de p-Sylows.

Exercice 9 (Proprietes abstraites des domaines fondamentaux)**.** Soit $G\curvearrowright X$ un G-ensemble. On rappelle qu'un domaine fondamental $\mathcal{D}\subset X$ est un sous-ensemble tel que l'application, "orbite" restreinte a $\mathcal{D}$

$$x\in\mathcal{D}\mapsto G.x\in G\backslash X$$

entre $\mathcal{D}$ et l'ensemble des orbites $G\backslash X$ est bijective.

Etant donne $\mathcal{O}$ une orbite l'element x correspondant a $\mathcal{O}$ par la bijection ci-dessus est appele "representant" de l'orbite $\mathcal{O}$ (qui n'est autre que $G.x$) et $\mathcal{D}$ est aussi appele ensemble de representant.

Aux notations pres on a la meme definition pour les action a droites.

1. Soient X, Y des G-ensembles et $\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_y$ les domaines fondamentaux associes.
   (a) Montrer qu'il y a une bijection entre $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X, Y)$ et le sous-ensemble de l'ensemble des applications de D_X vers Y defini par :
   $$\{\varphi : \mathcal{D}_X \to Y,\ \forall x \in \mathcal{D}_X,\ G_x \subset G_{\varphi(x)}\} \subset \mathrm{Hom}_{ens}(D_X, Y)$$
   (G_x et $G_{\varphi(x)}$ designent les stabilisateurs de x et $\varphi(x)$ dans G).
   (b) Que ce passe-t-il si G agit trivialement sur Y ?
   (c) On supppose que tous les stabilisateurs G_y des elements $y \in Y$ sont triviaux. Montrer que $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X, Y)$ est non-vide ssi tous les stabilisateurs G_x des elements $x \in X$ sont triviaux et qu'alors $\mathrm{Hom}_{G-ens}(X, Y)$ est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{ens}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y) \times \mathrm{Hom}_{ens}(\mathcal{D}_X, G)$.
2. Montrer que si $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental alors pour tout $g \in G$, le transforme de $\mathcal{D}$ par g $g.\mathcal{D} = \{g.x,\ x \in \mathcal{D}\}$ est un domaine fondamental.
3. Montrer que si $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental alors pour tout $g \in G$ on a
   $$\mathcal{D} \cap g.\mathcal{D} = X^g \cap \mathcal{D}$$
   (X^g l'ensemble des points fixes de g dans X). Que se passe-t-il dans le cas du groupe des rotations lineaires $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}^2$. puis sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
4. Montrer que $X = \bigcup_{g \in G} g.\mathcal{D}$.
5. Soit
   $$G_{\mathcal{D}} = \{g \in G,\ g.\mathcal{D} = \mathcal{D}\}$$
   le stabilizateur global de l'ensemble $\mathcal{D}$ et soit $\{g_i,\ i \in G/G_{\mathcal{D}}\}$ un ensemble de representants des classes (a droites) $G \curvearrowleft G_{\mathcal{D}}$ (autrement dit un domaine fondamental pour l'action par multiplication a droite de $G_{\mathcal{D}}$ sur G). Montrer que
   $$X = \bigcup_{i \in G/G_{\mathcal{D}}} g_i.\mathcal{D}.$$
6. Soit H un sous-groupe de G alors H agit sur X par restriction de l'action de G ; de meme H agit sur G par multiplication par la droite. Soit $\{g_i,\ i \in G/H\}$ un ensemble de representants des classes (a droites) de $G \curvearrowleft H$.
   Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental de $G \curvearrowright X$
   (a) Montrer que
   $$\mathcal{D}_H := \bigcup_{g_i,\ i \in G/H} g_i^{-1}.\mathcal{D}$$
   intersecte toute H-orbite de X.
   (b) On suppose que G agit sur X sans points fixes : $\forall g \in G - \{e_G\}$, $X^g = \emptyset$. Montrer qu'alors $\mathcal{D}_H$ est un domaine fondamental de $H \curvearrowright X$.

7. On suppose que $X = \mathbb{R}^2$ et que $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe d'isometries. On suppose egalement que le domaine fondamental $\mathcal{D}$ contient une boule

$$B = B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x - x_0| < r\}$$

pour $r > 0$. Montrer qu'alors on est dans l'un des deux cas suivants

$$g.B \cap B = \emptyset$$
$$g.B \cap B = B$$

Que dire sur g dans ce dernier cas ?