

Série 3

Exercice 1. Soit $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble et φ une isometrie. On note $\varphi(\mathbf{P})$ ou $\varphi.\mathbf{P}$ l'image de $\mathbf{P}$ par φ

$$\varphi(\mathbf{P}) = \varphi.\mathbf{P} = \{\varphi(P), P \in \mathbf{P}\}.$$

Montrer que

1. l'image de l'interieur est l'interieur de l'image

$$\varphi(\mathbf{P})^\circ = \varphi(\mathbf{P}^\circ),$$

2. l'image du bord est le bord de l'image

$$\partial\varphi(\mathbf{P}) = \varphi(\partial\mathbf{P}).$$

3. L'image du simplexe $\overline{ABC}$ est le simplexe $\varphi(\overline{ABC}) = \overline{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)}$.
4. L'image d'un polygone plein $\mathbf{P}$ est encore un polygone plein. De plus, les sommets et les aretes de l'image sont les images des sommets et des aretes de $\mathbf{P}$.
5. Montrer que cela reste vrai si φ est seulement une transformation affine.

Exercice 2 (Evident a voir mais pas forcément evident a prouver!). Montrer que tout polygone plein peut se decomposer en une reunion finie de simplexes tels que l'intersection de deux simplexes distincts est constituee de

1. soit l'ensemble vide,
2. soit un sommet commun,
3. soit un cote (face) commun (memes extremités).

Pour cela on commencera par montrer qu'une union de deux simplexes (disjoints ou non) peut se decomposer de cette maniere.

0.1 La surface modulaire

Les exercices suivants concernent le groupe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

des matrices reelles de determinant 1. On rappelle que ce groupe agit sur le demi-plan de Poincare

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0\}$$

par homographies (cf. Serie 11 MATH-120) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Dans le premier exercice on travaillera avec l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$. Les deux suivants concernent l'action du sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 3. (La decomposition d'Iwasawa.) On considere les sous ensembles

$$N = \{n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}, A = \{a(y) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}_{>0}\},$$

$$K = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

La decomposition d'Iwasawa est le resultat suivant

Théorème 1. *Toute matrice g de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ se decompose de maniere unique sous la forme*

$$g = n.a.k, n \in N, a \in A, k \in K.$$

Pour demontrer ce resultat on utilisera l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincare $\mathbb{H}$.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$. Pour cela on montrera que pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe $g \in N.A$ tel que $g.i = z$.
2. Montrer que le stabilisateur du point i dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_i$, est K . En deduire une bijection

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K \simeq \mathbb{H}.$$

3. Montrer que N et A sont des sous groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, que N est isomorphe a $(\mathbb{R}, +)$ et que A est isomorphe a $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$.
4. Montrer que

$$N.A = \{n.a, n \in N, a \in A\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et que $N.A \cap K = \{\mathrm{Id}\}$.

5. Etant donnees $n \in N$ et $a \in A$, a quoi correspondent les transformations de $\mathbb{C}$, $z \mapsto n.z$ et $z \mapsto a.z$. Quelles sont les orbites de N et A dans $\mathbb{H}$; donner un domaine fondamental pour chaque groupe.
6. Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{H}$, il existe un unique $n \in N$ et un unique $a \in A$ tels que $n.a.i = z$.

7. Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, en considérant le complexe $z := g.i$ et en l'écrivant sous la forme $z = n.a.i$, montrer qu'il existe $k \in K$ tel que

$$g = n.a.k, \quad n \in N, a \in A, k \in K.$$

8. Montrer qu'une telle représentation est unique.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

est engendré par les deux matrices

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = n(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c'est à dire que toute matrice $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ peut s'écrire comme un produit de matrices formées de puissances de n et de puissances de w .

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer w^k et n^k .
3. Soit une matrice $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ montrer qu'en multipliant γ par une puissance convenable de n on peut obtenir une matrice $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que
 - ou bien $c = 0$,
 - ou bien $|a'| < |c|$.
4. Dans le premier cas montrer que γ est un produit de puissances de w et de n .
5. Dans le second cas, montrer que $w.\gamma' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ vérifie $|c''| < |c|$.
6. Montrer par une récurrence convenable que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un produit de puissances de w et de n .

Exercice 5. On considère le sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0\}$ par transformations de Möbius

$$\gamma.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(on rappelle que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$ avec une seule orbite.) Le but de cet exercice est de trouver un domaine fondamental pour le quotient (ie. l'espace des orbites) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. Pour cela on utilisera les générateurs n et w de l'exercice précédent.

1. Soit $z \in \mathbb{H}$ et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, montrer la formule

$$\mathrm{Im} \gamma.z = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ avec $d \neq 0$ tel que $|d + cz|$ prend une valeur minimale (parmi toutes les valeurs absolues $|d' + c'z|$ avec $c', d' \in \mathbb{Z}$ et $d' \neq 0$). Montrer qu'alors c, d sont premiers entre eux (et si un des deux est nul, cela signifie que l'autre vaut 1).
3. Montrer qu'il existe dans l'orbite de z , $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).z$, un element $z_{\max} = \gamma.z$ dont la partie imaginaire $\mathrm{Im} z_{\max}$ est maximale (parmi tout les elements de l'orbite $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).z$).
4. Etant donne $z \in \mathbb{H}$, calculer $n^k.z$ et montrer que etant donne $z \in \mathbb{H}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\Re(n^k.z) \in [-1/2, 1/2[$.
5. Montrer que la transformation $z \mapsto w.z$ est une bijection entre le demi-disque $\{z \in \mathbb{H}, |z| < 1\}$ et l'espace $\{z \in \mathbb{H}, |z| > 1\} \subset \mathbb{H}$.
6. Montrer que $z_{\max}$ n'appartient pas au demi-disque $\{z \in \mathbb{H}, |z| < 1\}$.
7. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma.z$ est contenu dans le sous-ensemble (voir le dessin)

$$\overline{\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}} = \{z \in \mathbb{H}, \Re z \in [-1/2, 1/2], |z| \geq 1\}.$$

8. Que dire de l'action de w sur le demi-cercle $\{z \in \mathbb{H}, |z| = 1\} \subset \mathbb{H}$?
9. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma.z$ est contenu dans le sous-ensemble (voir le dessin)

$$\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \{z \in \mathbb{H}, \Re z \in [-1/2, 1/2[, |z| > 1\} \cup \{\Re z \in [-1/2, 0], |z| = 1\}.$$

10. Soit $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, montrer que pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\mathrm{Im}(\gamma.z) \leq \mathrm{Im} z$$

et examiner les cas d'egalite (il faudra bien sur utiliser le fait que a, b, c, d sont entiers avec $ad - bc = 1$).

11. Montrer que si z et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont tels que

$$z \text{ et } \gamma.z \text{ sont tous deux contenus dans } \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

alors $z = \gamma.z$ et ou bien $\gamma = \pm \mathrm{Id}$ ou bien $z = i$ ou bien $z = \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Montrer que $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ est un domaine fondamental pour l'action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$.
13. Dans les deux derniers cas de la question 11, quelles sont les valeurs possibles pour γ ?

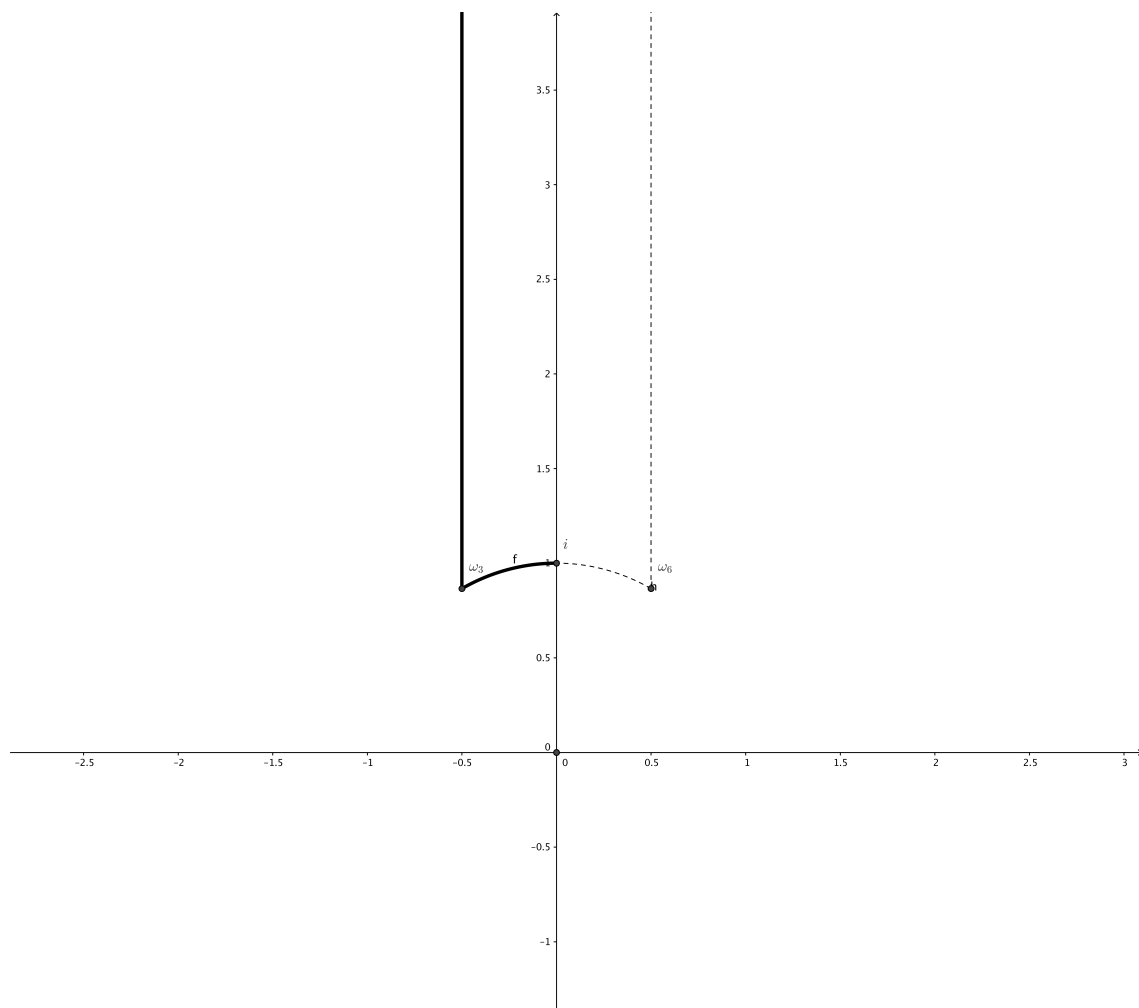


FIGURE 1 – Le domaine fondamental $\mathcal{D}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$