

Série 4

Des reseaux

On notera

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \{\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \text{ } \mathbb{R}\text{-lineairement indep.}\}$$

l'espace des reseaux de $\mathbb{R}^2$ c'est a dire l'ensemble des sous-groupes du groupe additif $\mathbb{R}^2$ engendre par deux elements lineairement independants. La paire $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelee $\mathbb{Z}$ -base de Γ (c'est une base de $\mathbb{R}^2$)

Un morphisme entre deux reseaux Γ, Γ' est simplement un morphisme de groupes $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$. Un endomorphisme d'un reseau Γ est un morphisme de Γ sur lui-meme ; un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Exercice 1. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$ un reseau avec une base donnee. Soit $\Gamma' \subset \Gamma$ un sous-groupe.

1. Montrer que l'on est dans l'un des trois cas suivants
 - (a) $\Gamma' = \{\mathbf{0}\}$.
 - (b) Il existe $\vec{u}' \in \Gamma - \{\mathbf{0}\}$ tel que $\Gamma' = \mathbb{Z}\vec{u}'$.
 - (c) Il existe deux vecteurs $\mathbb{R}$ -lineairement independants $\vec{u}', \vec{v}' \in \Gamma$ tels que

$$\Gamma' = \mathbb{Z}.\vec{u}' + \mathbb{Z}.\vec{v}'.$$

Pour cela on s'inspirera de la methode utilisee pour montrer que le groupe des translation d'un pavage regulier est de la forme $T(\Gamma)$ pour Γ un reseau.

2. On suppose que l'on se trouve dans le dernier cas (Γ' est un reseau). Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ s'exprime comme combinaison lineaire a coefficients rationnels de $(\vec{u}', \vec{v}')$ et qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$n.\Gamma = \mathbb{Z}n.\vec{u} + \mathbb{Z}n.\vec{v} \subset \Gamma'.$$

Pour cela remarquer que $(\vec{u}', \vec{v}')$ s'exprime comme combinaison lineaire a coefficients entiers de $(\vec{u}, \vec{v})$

3. Montrer que (toujours dans le dernier cas) le groupe quotient Γ/Γ' est fini d'ordre $\leq n^2$: Pour cela on definira un morphisme de groupe surjectif

$$\Gamma/n\Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma'.$$

(on a bien des groupes quotients car Γ est commutatif et tout sous-groupe est normal.)

Exercice 2. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$ un reseau avec une base donnee.

1. Montrer que le choix de cette base permet d'identifier l'ensemble $\text{End}_{\mathcal{L}_2}(\Gamma)$ des endomorphismes de Γ avec $M_2(\mathbb{Z})$ (l'anneau des matrices a coordonnees entieres) : en voyant $(\vec{u}, \vec{v})$ comme une base de $\mathbb{R}^2$, on montrera qu'un endomorphisme de Γ est la restriction a Γ d'une application lineaire sur $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \pm 1 \right\}$$

l'ensemble des matrices a coordonnees entieres de determinant ± 1 . Montrer que $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

3. Montrer qu'avec l'identification de la premiere question, le groupe $\text{Aut}_{\mathcal{L}_2}(\Gamma)$ des automorphismes de Γ s'identifie avec le groupe $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$.
4. Montrer que les bases $(\vec{u}', \vec{v}')$ de Γ sont exactement de la forme

$$\vec{u}' = a\vec{u} + c\vec{v}, \vec{v}' = b\vec{u} + d\vec{v}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = \pm 1$.

5. On definit le *volume* du reseau $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$, $\text{vol}(\Gamma)$, comme etant l'aire du parallelogramme fondamental porte par une base $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\text{vol}(\Gamma) = \text{Aire}(\mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}}), \mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}} = \{x\vec{u} + y\vec{v}, x, y \in [-1/2, 1/2]\}.$$

Calculer $\text{Aire}(\mathbf{P}_{\vec{u}, \vec{v}})$ en terme de la matrice des coordonnees de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et montrer que la notation $\text{vol}(\Gamma)$ est bien definie : le volume $\text{vol}(\Gamma)$ du reseau Γ ne depend pas du choix d'une base de ce reseau.

Exercice 3. 1. Montrer que l'action du groupe $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ induit une action de ce groupe sur l'espace des reseaux $\mathcal{L}_2$ (on considerera l'action a gauche de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ obtenu en identifiant $\mathbb{R}^2$ avec l'espace des vecteur colonnes a deux lignes.) Plus precisement si

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$L = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

on pose

$$g.L = \mathbb{Z}g.\vec{u} + \mathbb{Z}g.\vec{v} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} ax_u + by_u \\ cx_u + dy_u \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} ax_v + by_v \\ cx_v + dy_v \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que cette action est transitive (n'a qu'une seule orbite).
3. Calculer le stabilisateur du réseau $\mathbb{Z}^2$ et montrer qu'on a l'identification $\mathcal{L}_2 \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
4. Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et Γ un réseau ; montrer que

$$\mathrm{vol}(g.\Gamma) = |\det g| \mathrm{vol}(\Gamma).$$

Comme dans le cours, on identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ (et la base canonique à la $\mathbb{R}$ -base de $\mathbb{C}$ $(1, i)$) et on écrira un réseau sous la forme $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma + \mathbb{Z}\gamma'$ $\gamma, \gamma' \in \mathbb{C}^\times$, $\gamma/\gamma' \notin \mathbb{R}$.

Exercice 4. Pour $z \in \mathbb{C}^\times$ non-reel, on définit le réseau

$$\Gamma_z := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.z \text{ (de base } (1, z)).$$

1. Que vaut $\mathrm{vol}(\Gamma_z)$?
2. On a défini dans la série précédente un domaine fondamental $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ (l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive) par homographies.
Soit $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Montrer que pour le réseau $\Gamma_z = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}.z$, 1 est un élément du réseau non-nul de longueur minimale et z est un élément non-colinéaire à 1 de longueur minimale.

Exercice 5. Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}^\times$; l'homothétie complexe de rapport α est la transformation du plan complexe $\mathbb{C}$ obtenue en multipliant par α

$$[\times \alpha] : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \alpha.z \end{array}$$

C'est une application linéaire du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$.

1. Donner la matrice de $[\times \alpha]$ dans la base $(1, i)$; calculer en fonction de α , la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de cette application. L'application

$$\alpha \in \mathbb{C}^\times \mapsto [\times \alpha]$$

définit alors un isomorphisme entre le groupe $\mathbb{C}^\times$ et un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

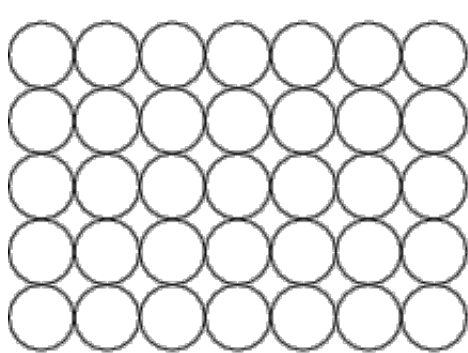
2. On note

$$[\mathcal{L}_2] = \mathbb{C}^\times \backslash \mathcal{L}_2 = \{\alpha.\Gamma, \alpha \in \mathbb{C}^\times\}$$

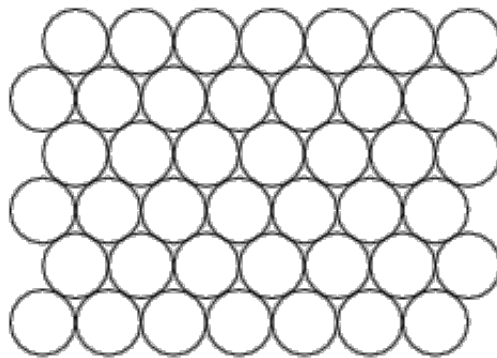
l'espace des orbites des réseaux de $\mathbb{C}$ sous l'action de ce sous-groupe (si deux réseaux appartiennent à une même orbite on dit qu'ils sont $\mathbb{C}^\times$ -homothétiques). Montrer que toute orbite $\mathbb{C}^\times.\Gamma$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{C}^\times.\Gamma = \mathbb{C}^\times.\Gamma_z$$

pour $z \in \mathbb{H}$



square packing



hexagonal packing

3. Montrer qu'on peut supposer que $z \in \mathcal{D}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ et que dans ce cas z est uniquement défini. En d'autres termes l'application

$$z \in \mathcal{D}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} \mapsto \mathbb{C}^\times \cdot L_z \in [\mathcal{L}_2].$$

est une bijection.

Exercice 6. Dans cet exercice on va discuter le problème de remplir le mieux possible le plan avec des boules identiques qui ne se touchent au plus que le long de leur bord (voir la figure). Bien sûr on ne peut remplir tout le plan exactement mais on peut essayer de faire au mieux. Étant donné $r > 0$ et Γ un réseau on définit

$$\Gamma(r) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, r) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + B(0, r)$$

la réunion des boules (ouvertes) de rayon r centrées aux points du réseau, i.e.

$$B(\gamma, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \gamma| < r\}.$$

On suppose que les boules ne se touchent pas : i.e. r est tel que

$$\gamma \neq \gamma' \in \Gamma \implies B(\gamma, r) \cap B(\gamma', r) = \emptyset. \quad (1)$$

Pour mesurer la qualité de remplissage du plan par ce réseau de boules $\Gamma(r)$ on introduit la densité de remplissage (on va montrer que cette limite converge)

$$\delta(\Gamma, r) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Aire}(B(0, R) \cap \Gamma(r))}{\pi R^2}$$

où $B(0, R)$ est la boule centrée en 0 et de rayon R . Ainsi, on regarde la limite quand la boule devient grande de la proportion de la surface couverte dans la boule par les boules centrées aux points du réseau.

1. Soit (γ, γ') une base du reseau, $\mathbf{P} = [-1/2, 1/2[\gamma + [-1/2, 1/2[\gamma'$ le parallelogramme fondamental correspondant et $\gamma + \mathbf{P}$, $\gamma \in \Gamma$ ses differents translates par les points du reseau. On se donne egalement $r_0 > 0$ tel que $\mathbf{P}$ soit contenu dans la boule $B(0, r_0)$. Montrer que pour $R \geq 3r_0$, la reunion de tous les translates $\gamma + \mathbf{P}$, $\gamma \in \Gamma$ de $\mathbf{P}$ qui intersectent le cercle $C(0, R)$ est contenue dans la boule $B(0, R + 2r_0)$ et n'intersecte pas la boule $B(0, R - 3r_0)$.
2. En deduire que le nombre de translates $\gamma + \mathbf{P}$, $\gamma \in \Gamma$ de $\mathbf{P}$ qui sont contenus dans $B(0, R)$ est de la forme

$$\frac{\pi R^2}{\text{vol}(\Gamma)} + O_\Gamma(R)$$

avec $O_\Gamma(R)$ une fonction de R (dependant de Γ d'une maniere qu'on ne specifiera pas) et qui verifie pour $R \geq 1$

$$|O_\Gamma(R)| \leq C'_\Gamma R.$$

3. Montrer que la limite quand $R \rightarrow \infty$ existe et vaut

$$\delta(\Gamma, r) = \frac{\pi \cdot r^2}{\text{vol}(\Gamma)}$$

(pour r verifiant (1).)

4. Soit $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ tels que $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}\gamma_1$ comme dans le cours. Montrer que $r_\Gamma = |\gamma_0|/2$ est le rayon maximal tel que (1) soit verifie. On pose

$$\delta(\Gamma) = \delta(\Gamma, r_\Gamma) = \frac{\pi \cdot r_\Gamma^2}{\text{vol}(\Gamma)}.$$

5. Montrer que $\delta(\Gamma)$ ne varie pas par rotation du reseau ou par homotheties.
6. On peut donc supposer (Exercice 4) que $\Gamma = \Gamma_z = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.z$ avec $z \in \mathcal{D}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Montrer que $\delta(\Gamma_z)$ est maximal pour $z = \omega_3$ (le reseau associe au pavage triangulaire ou hexagonal ou des ruches d'abeilles).

Remarque 0.1. On peut poser le meme probleme de remplissage de l'espace par des spheres en dimension superieure. En dimension 3, Johannes Kepler a conjecture au 17 ieme siecle que l'empilement de spheres le plus dense est celui qu'on trouve sur les etals des marches. Mais cette conjecture ne fut demontree qu'en 1998 par Thomas Hales; la preuve fait plus de 100 pages et utilise de lourds calculs par ordinateur.

Le probleme a ete resolu pour les dimension 8 et 24 au printemps 2016 par Maryna Viazovska; Maryna Viazovska aujourd'hui professeure a l'EPFL. On ne connait pas d'autre dimension ou ce probleme soit resolu.



FIGURE 1 – Empilement cubique vs. empilement de Kepler (source Tom Dunne)