EPFL Printemps 2019
Geometrie, MATH-125

Série 4 & 5

Des reseaux

On notera

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \{\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v},\ \vec{u}, \vec{v}\ \mathbb{R}\text{-lineairement indep.}\}$$

l'espace des reseaux de $\mathbb{R}^2$ c'est a dire l'ensemble des sous-groupes du groupe additif $\mathbb{R}^2$ engendre par deux elements lineairement independants. La paire $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelee $\mathbb{Z}$-base de Γ (c'est une base de $\mathbb{R}^2$)

Un morphisme entre deux reseaux Γ, Γ' est simplement un morphisme de groupes $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$. Un endomorphisme d'un reseau Γ est un morphisme de Γ sur lui-meme ; un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Exercice 1. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$ un reseau avec une base donnee. Soit $\Gamma' \subset \Gamma$ un sous-groupe.

1. Montrer que l'on est dans l'un des trois cas suivants
   (a) $\Gamma' = \{\mathbf{0}\}$.
   (b) Il existe $\vec{u}' \in \Gamma - \{\mathbf{0}\}$ tel que $\Gamma' = \mathbb{Z}\vec{u}'$.
   (c) Il existe deux vecteurs $\mathbb{R}$-lineairement independants $\vec{u}', \vec{v}' \in \Gamma$ tels que
   $$\Gamma' = \mathbb{Z}.\vec{u}' + \mathbb{Z}.\vec{v}'.$$
   Pour cela on s'inspirera de la methode utilisee pour montrer que le groupe des translation d'un pavage regulier est de la forme $T(\Gamma)$ pour Γ un reseau.
2. On suppose que l'on se trouve dans le dernier cas (Γ' est un reseau). Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ s'exprime comme combinaison lineaire a coefficients rationnels de $(\vec{u}', \vec{v}')$ et qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que
   $$n.\Gamma = \mathbb{Z}n.\vec{u} + \mathbb{Z}n.\vec{v} \subset \Gamma'.$$
   Pour cela remarquer que $(\vec{u}', \vec{v}')$ s'exprime comme combinaison lineaire a coefficients entiers de $(\vec{u}, \vec{v})$

3. Montrer que (toujours dans le dernier cas) le groupe quotient Γ/Γ' est fini d'ordre $\leqslant n^2$: Pour cela on definira un morphisme de groupe surjectif

$$\Gamma/n\Gamma \to \Gamma/\Gamma'.$$

(on a bien des groupes quotients car Γ est commutatif et tout sous-groupe est normal.)

Exercice 2. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$ un reseau avec une base donnee.

1. Montrer que le choix de cette base permet d'identifier l'ensemble $\mathrm{End}_{\mathcal{L}_2}(\Gamma)$ des endomorphismes de Γ avec $M_2(\mathbb{Z})$ (l'anneau des matrices a coordonnees entieres) : en voyant $(\vec{u}, \vec{v})$ comme une base de $\mathbb{R}^2$, on montrera qu'un endomorphisme de Γ est la restriction a Γ d'une application lineaire sur $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit
$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = \pm 1\}$$
l'ensemble des matrices a coordonnees entieres de determinant ± 1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.
3. Montrer qu'avec l' identification de la premiere question, le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_2}(\Gamma)$ des automorphismes de Γ s'identifie avec le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
4. Montrer que les bases $(\vec{u}', \vec{v}')$ de Γ sont exactement de la forme
$$\vec{u}' = a\vec{u} + c\vec{v},\ \vec{v}' = b\vec{u} + d\vec{v}$$
$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = \pm 1$.
5. On definit le *volume* du reseau $\Gamma = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$, $\mathrm{vol}(\Gamma)$, comme etant l'aire du parallelogramme fondamental porte par une base $(\vec{u}, \vec{v})$:
$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \mathrm{Aire}(\mathbf{P}_{\vec{u},\vec{v}}),\ \mathbf{P}_{\vec{u},\vec{v}} = \{x\vec{u} + y\vec{v},\ x, y \in [-1/2, 1/2[\}.$$
Calculer $\mathrm{Aire}(\mathbf{P}_{\vec{u},\vec{v}})$ en terme de la matrice des coordonnees de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et montrer que la notation $\mathrm{vol}(\Gamma)$ est bien definie : le volume $\mathrm{vol}(\Gamma)$ du reseau Γ ne depend pas du choix d'une base de ce reseau.

Exercice 3. 1. Montrer que l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ induit une action de ce groupe sur l'espace des reseaux $\mathcal{L}_2$ (on considerera l'action a gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ obtenu en identifiant $\mathbb{R}^2$ avec l'espace des vecteur colonnes a deux lignes.) Plus precisement si

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$L = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v} = \mathbb{Z}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

on pose

$$g.L = \mathbb{Z}g.\vec{u} + \mathbb{Z}g.\vec{v} = \mathbb{Z}\begin{pmatrix} ax_u + by_u \\ cx_u + dy_u \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} ax_v + by_v \\ cx_v + dy_v \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que cette action est transitive (n'a qu'une seule orbite).
3. Calculer le stabilisateur du reseau $\mathbb{Z}^2$ et montrer qu'on a l'identification $\mathcal{L}_2 \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
4. Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et Γ un reseau ; montrer que

$$\mathrm{vol}(g.\Gamma) = |\det g|\mathrm{vol}(\Gamma).$$

Comme dans le cours, on identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ (et la base canonique a la $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ $(1, i)$) et on ecrira un reseau sous la forme $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma + \mathbb{Z}\gamma'$ $\gamma, \gamma' \in \mathbb{C}^\times$, $\gamma/\gamma' \notin \mathbb{R}$.

Exercice 4. Pour $z \in \mathbb{C}^\times$ non-reel, on defini le reseau

$$\Gamma_z := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.z \text{ (de base } (1, z)).$$

1. Que vaut $\mathrm{vol}(\Gamma_z)$?
2. On a defini dans la serie precedente un domaine fondamental $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincare $\mathbb{H}$ (l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive) par homographies.
   Soit $z = x + iy \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Montrer que pour le reseau $\Gamma_z = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}.z$, 1 est un element du reseau non-nul de longueur minimale et z est un element non-colineaire a 1 de longueur minimale. Pour cela on etudiera le signe de

$$(m + nx)^2 + n^2y^2 - (x^2 + y^2)$$

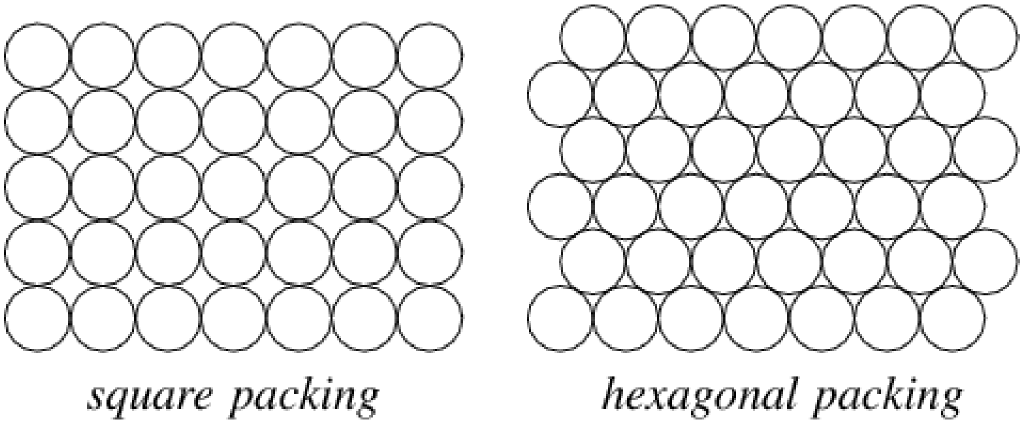
   pour $m, n \in \mathbb{Z}$ en utilisant la minoration

$$mnx \geqslant -\frac{1}{2}(m^2 + n^2x^2).$$

Exercice 5. Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}^\times$; *l'homothetie complexe* de rapport α est la transformation du plan complexe $\mathbb{C}$ obtenue en multipliant par α

$$[\times\alpha] : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \alpha.z \end{array}.$$

C'est une application lineaire du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.



1. Donner la matrice de $[\times\alpha]$ dans la base $(1, i)$; calculer en fonction de α, la trace, le determinant et le polynome caracteristique de cette application. L'application
$$\alpha \in \mathbb{C}^\times \mapsto [\times\alpha]$$
defini alors un isomorphisme entre de groupe $\mathbb{C}^\times$ et un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. On note
$$[\mathcal{L}_2] = \mathbb{C}^\times \backslash \mathcal{L}_2 = \{\alpha.\Gamma,\ \alpha \in \mathbb{C}^\times\}$$
l'espace des orbites des reseaux de $\mathbb{C}$ sous l'action de ce sous-groupe (si deux reseaux appartiennent a une meme orbite on dit qu'ils sont $\mathbb{C}^\times$-homothetiques). Montrer que toute orbite $\mathbb{C}^\times.\Gamma$ peut s'ecrire sous la forme
$$\mathbb{C}^\times.\Gamma = \mathbb{C}^\times.\Gamma_z$$
pour $z \in \mathbb{H}$
3. Montrer qu'on peut supposer que $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ et que dans ce cas z est uniquement defini. En d'autre termes l'application
$$z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mapsto \mathbb{C}^\times.L_z \in [\mathcal{L}_2].$$
est une bijection.

Exercice 6. Dans cet exercice on va discuter le probleme de remplir le mieux possible le plan avec des boules identiques qui ne se touchent au plus que le long de leur bord (voir la figure). Bien sur on ne peut remplir tout le plan exactement mais on peut essayer de faire au mieux. Etant donne $r > 0$ et Γ un reseau on defini
$$\Gamma(r) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, r) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + B(0, r)$$

la reunion des boules (ouvertes) de rayon r centrees aux point du reseau, ie.

$$B(\gamma, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-\gamma| < r\}.$$

On suppose que les boules ne se touchent pas : ie. r est tel que

$$\gamma \neq \gamma' \in \Gamma \Longrightarrow B(\gamma, r) \cap B(\gamma', r) = \emptyset. \tag{1}$$

Pour mesurer la qualite de remplissage du plan par ce reseau de boules $\Gamma(r)$ on introduit la densite de remplissage (on va montrer que cette limite converge)

$$\delta(\Gamma, r) = \lim_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Aire}(B(0,R) \cap \Gamma(r))}{\pi R^2}$$

ou $B(0,R)$ est la boule centree en 0 et de rayon R. Ainsi, on regarde la limite quand la boule devient grande de la proportion de la surface couverte dans la boule par les boules centrees aux points du reseau.

1. Soit (γ, γ') une base du reseau, $\mathbf{P} = [-1/2, 1/2[\gamma + [-1/2, 1/2[\gamma'$ le parallelogramme fondamental correspondant et $\gamma + \mathbf{P},\ \gamma \in \Gamma$ ses differents translates par les points du reseau. On se donne egalement $r_0 > 0$ tel que $\mathbf{P}$ soit contenu dans la boule $B(0, r_0)$. Montrer que pour $R \geqslant 3r_0$, la reunion de tous les translates $\gamma + \mathbf{P},\ \gamma \in \Gamma$ de $\mathbf{P}$ qui intersectent le cercle $\mathrm{C}(0,R)$ est contenue dans la boule $B(0, R+2r_0)$ et n'intersecte pas la boule $B(0, R-3r_0)$.
2. En deduire que le nombre de translates $\gamma + \mathbf{P},\ \gamma \in \Gamma$ de $\mathbf{P}$ qui sont contenus dans $B(0,R)$ est de la forme

   $$\frac{\pi R^2}{\mathrm{vol}(\Gamma)} + O_\Gamma(R)$$

   avec $O_\Gamma(R)$ une fonction de R (dependant de Γ d'une maniere qu'on ne specifiera pas) et qui verifie pour $R \geqslant 1$

   $$|O_\Gamma(R)| \leqslant C'_\Gamma R.$$

   Pour cela on donnera une majoration et une minoration de ce nombre et on montrera que la difference de la majoration et de la minoration est en $O_\Gamma(R)$.
3. Montrer que la limite quand $R \to \infty$ existe et vaut

   $$\delta(\Gamma, r) = \frac{\pi . r^2}{\mathrm{vol}(\Gamma)}$$

   (pour r verifiant (1).)

FIGURE 1 – Empilement cubique vs. empilement de Kepler (source Tom Dunne)

4. Soit $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ tels que $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_0 + \mathbb{Z}.\gamma_1$ comme dans le cours. Montrer que $r_\Gamma = |\gamma_0|/2$ est le rayon maximal tel que (1) soit verifie. On pose
$$\delta(\Gamma) = \delta(\Gamma, r_\Gamma) = \frac{\pi.r_\Gamma^2}{\mathrm{vol}(\Gamma)}.$$
5. Montrer que $\delta(\Gamma)$ ne varie pas par rotation du reseau ou par homotheties.
6. On peut donc supposer (Exercice 4) que $\Gamma = \Gamma_z = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.z$ avec $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Montrer que $\delta(\Gamma_z)$ est maximal pour $z = \omega_3$ (le reseau associe au pavage triangulaire ou hexagonal ou des ruches d'abeilles).

Remarque 0.1. On peut poser le meme probleme de remplissage de l'espace par des spheres en dimension superieure. En dimension 3, Johannes Kepler a conjecture au 17 ieme siecle que l'empilement de spheres le plus dense est celui qu'on trouve sur les etals des marches. Mais cette conjecture ne fut demontree qu'en 1998 par Thomas Hales ; la preuve fait plus de 100 pages et utilise de lourds calculs par ordinateur.

Le probleme a ete resolu pour les dimension 8 et 24 au printemps 2016 par Maryna Viazovska ; Maryna Viazovska aujourd'hui professeure a l'EPFL. On ne connait pas d'autre dimension ou ce probleme soit resolu.

Exercice 7. Pour chacun des pavages ci-dessous (cf la fin de la la serie), etant donne G son groupe d'isometries et $G^+ \subset G$ son groupe des rotations. Donner

1. La classe d'isomorphisme du groupe G^+ ($p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p6$).
2. Representer une base de vecteurs du reseau des translations.
3. Determiner si $G = G^+$.

4. si ce n'est pas le cas, donner une isometrie $s \in G - G^+$ et preciser sa nature ? Representer sur le dessin les quantites geometriques associes a s.

Remarque : il sera necessaire "d'oublier" les couleurs et parfois de reunir deux tuiles distinctes ensembles pour obtenir un pavage a une seule tuile.

Exercice 8. Soit G un groupe et H un sous-groupe. On rappelle que l'indice de H dans G est le nombre de H-orbites dans G pour l'action de translation a droite ; on note ce nombre (qui peut etre $+\infty$)

$$[G : H] = |G/H| = |H\backslash G|.$$

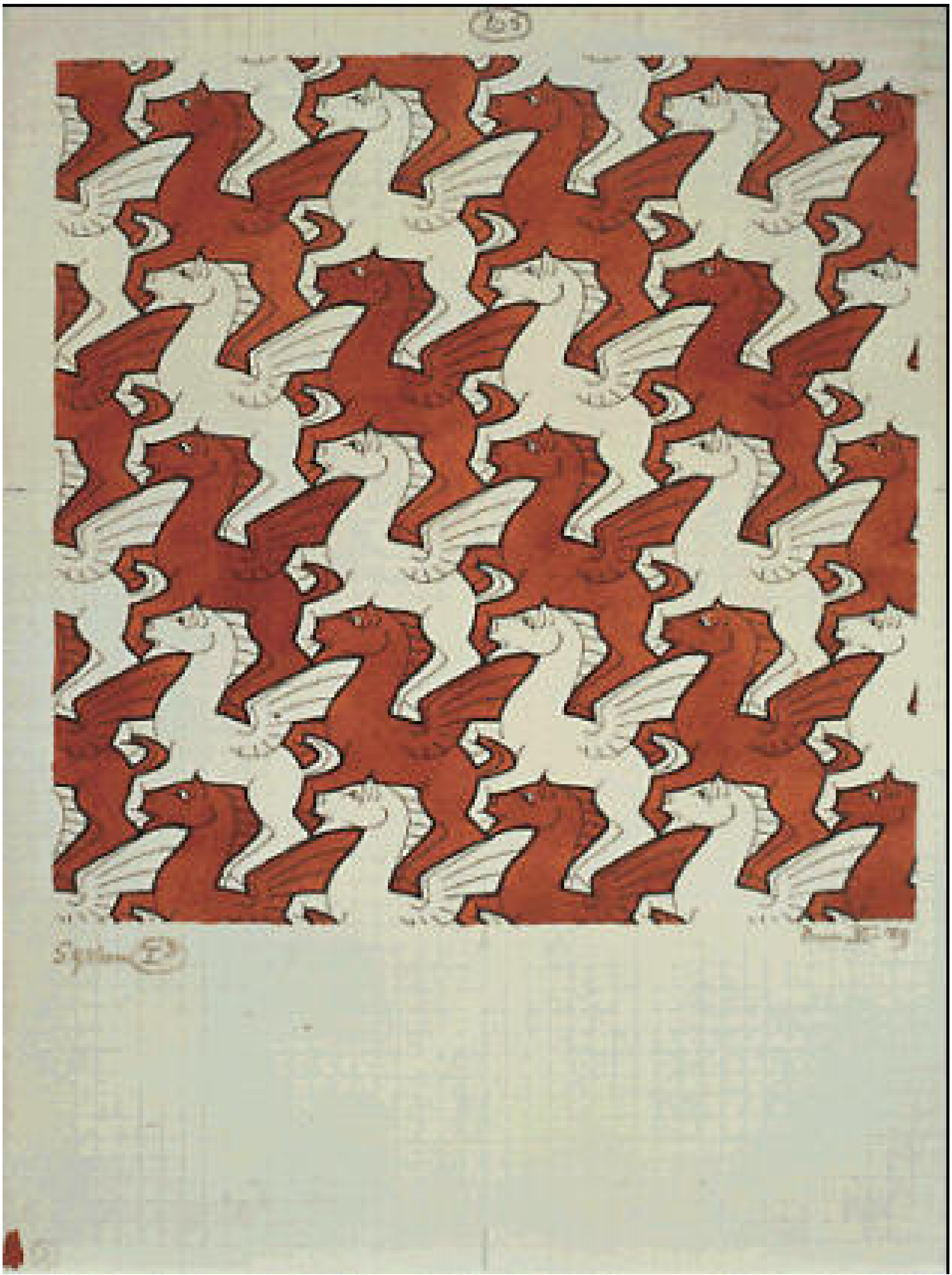
On rappelle que si G est finit on a (Lagrange)

$$|G/H| = |G|/|H|.$$

1. Verifier que
$$|G/H| = |H\backslash G|$$
(considerer une decomposition de G en union disjointe de H-orbite a droite et appliquer l'inversion du groupe).
2. Soit $K \subset H \subset G$ une suite de sous-groupes. Montrer que l'indice est une fonction transitive :
$$[G : K] = [G : H].[H : K].$$
Pour cela on pourra ecrire de deux manieres une decomposition de G en union disjointe de K-orbites a droite.

Exercice 9. Soit $G = G_{\mathcal{P}}$ un groupe cristallographique et G^+ son sous-groupe des rotations et $T_G = T(\Gamma) \in G^+$ son reseau des translations. On note G_0 l'image de G par le morphisme partie lineaire et G_0^+ celle de G^+. On suppose que $G \neq G^+$ et on note s un element de $G - G^+$ (si il existe). On note s_0 sa partie lineaire.

1. Montrer que T_G et G^+ sont distingues dans G.
2. Montrer que G/G^+ est d'ordre $\leqslant 2$.
3. Montrer que en general l'indice G/T_G est d'ordre $\leqslant 12$.
4. Quelle sont les structures possible du groupe G_0 et quelles sont les valeurs possible de son ordre suivant qu'il existe ou pas un $s \in G - G^+$?
5. On suppose qu'il existe $s \in G - G^+$. Montrer que $s^2 \in T(\Gamma)$.
6. Montrer que s se decompose sous la forme $t_\gamma \circ s'$ avec s' une symetrie axiale d'axe parallele a γ et que $\gamma \in \frac{1}{2}\Gamma$.
7. soit s_0 la partier lineaire de s. Montrer que $s_0(\Gamma) = \Gamma$ (conjuguer !).

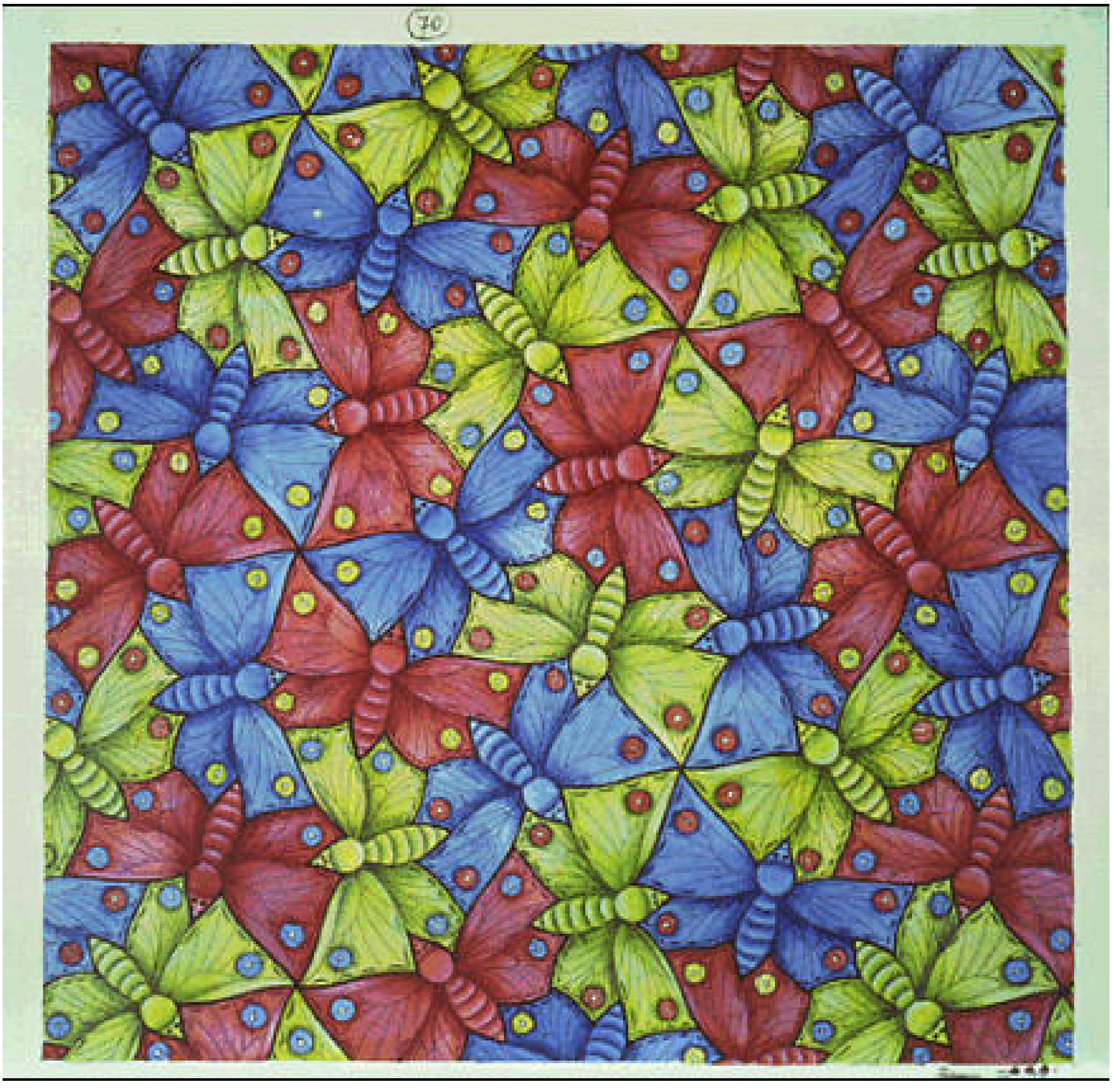


8. On suppose (quitte a conjuguer G par un element convenable) que $\Gamma = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}\gamma_1$ avec $(1, \gamma_1)$ satisfaisant les proprietes de minimalite du cours. On a meme vu qu'on peut suppper que γ_1 appartient au domaine fondamental $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Montrer que si $|\gamma_1| > 1$ alors $s_0(1) = \pm 1$.
9. Si $s_0(1) = -1$ que dire de $\Re e \gamma_1$?

51

Systeem IV C ([illegible])

[illegible]


70


94
I B2 type 1


23