EPFL Printemps 2019
Geometrie, MATH-125

Série 8

Dans cette serie on commence par reprendre l'exercice 3 de la serie precedente. Pour vous aider on a ajoute la question preliminaire suivante :

Exercice (question preliminaire). (a l'exercice 3 de la serie 7) Soit X, Y des espaces affines de direction V et W respectivement.

— Montrer que si $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n)$ est une base de V et que $(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n)$ est un ensemble quelconque de vecteurs de W, il existe une unique application lineaire $\varphi_0 : V \to W$ telle que
$$\varphi_0(\vec{v}_i) = \vec{w}_i,\ i01, \cdots, n.$$
— Montrer que se donner une application affine $\varphi : X \to Y$ est equivalent a se donner :
  — Un point $P_0 \in X$.
  — Un point $Q_0 \in Y$
  — Une application lineaire $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$.

  Plus precisement etant donne P_0, Q_0 et φ_0 comme ci-dessus il existe une unique application affine $\varphi : X \mapsto Y$ telle que
$$\varphi(P_0) = Q_0$$
  et la partie lineaire de φ est φ_0.

Exercice 3. (Serie 7) Soit φ l'application affine qui envoie
$$P_0 = (1, 1, 1), P_1 = (1, 1, 2),\ P_2 = (1, 2, 1),\ P_3 = (2, 2, 4)$$
sur
$$Q_0 = (1, 2, 3), Q_1 = (1, 3, 3),\ Q_2 = (2, 3, 6),\ Q_3 = (1, 2, 4).$$

1. Pourquoi φ existe-elle ? Pourquoi est elle unique ?
2. Decomposer φ sous forme translation/partie lineaire. Calculer son image et $\varphi^{-1}((3, 2, 1))$. Si φ est inversible calculer son inverse.
3. Meme question pour l'application affine qui envoie les meme quatre points sur
$$Q_0 = (1, 2, 3), Q_1 = (1, 3, 3),\ Q_2 = (1, 7/3, 10/3),\ Q_3 = (1, 2, 4).$$

4. Existe-t-il une application affine qui envoie

$$P'_0 = (1,1,1), P'_1 = (1,1,2),\ P'_2 = (3/2,3/2,3),\ P'_3 = (2,2,4)$$

sur

$$Q'_0 = (1,2,3), Q'_1 = (1,3,3),\ Q'_2 = (1,5/2,7/2),\ Q'_3 = (1,2,4)\ ?$$

Cette application est elle unique ?

On reprend maintenant la serie 8.

– On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i$$

pour $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{v} = (x'_1, \cdots, x'_n)$.

– Dans la suite on ecrira "BO" pour "base orthonormee". On notera une BO de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ sera notee

$$\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_{0,1}, \cdots, \mathbf{e}_{0,n}) :$$

$$\mathbf{e}_{0,1} = (1, 0, \cdots, 0), \cdots$$

– Dans cette feuille toutes les isometries seront par defaut des isometries fixant l'origine.

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une application lineaire. L'adjointe de φ est par definition (algebre lineaire avancee) l'unique application lineaire $\varphi^* : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ qui verifie :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^*(\vec{v}) \rangle.$$

Soit $M = (x_{i,j})_{i,j \leqslant n}$ la matrice de φ dans la base canonique et $M^* = (x^*_{i,j})_{i,j \leqslant n}$ celle de l'application adjointe : ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_{0,i}) = \sum_{j=1}^{n} x_{j,i} \mathbf{e}_{0,j},\ \varphi^*(\mathbf{e}_{0,i}) = \sum_{j=1}^{n} x^*_{j,i} \mathbf{e}_{0,j}$$

1. Montrer que $x_{j,i} = \langle \varphi(\mathbf{e}_{0,i}), \mathbf{e}_{0,j} \rangle$.
2. En deduire que $x^*_{i,j} = x_{j,i}$ de sorte que

$$M^* = {}^tM$$

ou ${}^tM = (x_{j,i})_{i,j \leqslant n}$ designe la matrice transposee (obtenue en applicant aux coefficients de M la symetrie par rapport a la premiere diagonale).

3. Montrer (avec le minimum de calculs possibles) que si $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ sont des matrices quelconques, on a

$$^t(M+N) = {}^tM + {}^tN,\ {}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM, {}^t(M^{-1}) = {}^tM^{-1}$$

(dans le dernier cas si M est inversible).

4. Montrer que

$$\varphi \text{ est une isometrie } \iff \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle \iff {}^tM = M^{-1}.$$

Exercice 2. (Autour de Gramm-Schmidt) Dans $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver un BO dont un vecteur engendre le sous-espace W defini par les equations

$$W : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

2. Trouver une BO dont deux vecteurs forment une base du sous-espace

$$V = \langle (1,2,0), (3,1,2) \rangle.$$

3. Trouver une BO dont deux vecteurs forment une base du sous-espace

$$V = \{(x,y,z),\ x+y+z=0\}.$$

que remarquez vous pour le troisieme vecteur ?

Exercice 3. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace ; on note

$$V^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \vec{v} \in V,\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0\}$$

l'ensemble des vecteur de $\mathbb{R}^3$ perpendiculaires a tous les vecteur de V.

1. Montrer que $V^\perp$ est un SEV. On veut montrer qu'on a une decomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp.$$

En particulier $\dim V + \dim V^\perp = n$.

2. Montrer que $V \cap V^\perp = \{0\}$.
3. Supposons que $\mathbb{R}^n \neq V + V^\perp$. Montrer en utilisant Gramm-Schimdt qu'il existe $w \in \mathbb{R}^n$ qui est perpendiculaire a V et a $V^\perp$ et en deduire une contradiction.
4. Montrer qu'on peut trouver une BO de $\mathbb{R}^n$ dont une partie des vecteurs forme une BO de V et la partie complementaire une BO de $V^\perp$.
5. soit φ une isometrie lineaire qui laisse V stable ($\varphi(V) \subset V$) ; montrer que $\varphi(V) = V$ et que $\varphi(V^\perp) = V^\perp$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul ; on considere l'application

$$\varphi_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$

1. Montrer que $\varphi_{\vec{v}}$ est une isometrie.
2. On dit que $\varphi_{\vec{v}}$ est la symetrie orthogonale par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^{\perp}$. Pourquoi ?

Exercice 5. Soit

$$\mathcal{BO} = \{(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{i=j}\}$$

l'espace de toutes les bases orthonormees de $\mathbb{R}^n$.

1. soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lineaire. Montrer que φ est une isometrie si et seulement si elle transforme au moins une BO en une autre BO et qu'alors elle transforme toute BO en une autre BO.
2. Ainsi le groupe des isometries lineaires $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$ agit sur $\mathcal{BO}$. Montrer que cette action est transitive et que $\mathcal{BO}$ est un espace principal homogene sous $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_0$.

Exercice 6. Soit

$$S^2 = \mathcal{S}(\mathbf{0}, 1) = \{P \in \mathbb{R}^3,\ d(\mathbf{0}, P) = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

la sphere unite.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_0$ agit transitivement sur S^2 (pensez a utiliser Gramm-Schmidt.)
2. Verifier que c'est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 7. Pour chacune des matrices suivantes determiner si elles sont orthogonales et calculer leur determinant.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & -12 & -20 \\ -20 & 15 & 0 \\ -12 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$