EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2019

Série 10

L'exercice 3 est particulierement utile pour la classification des isometries de $\mathbb{R}^3$. Il se sera pas fait en cours et il est fortement conseille de savoir faire et de savoir l'utiliser (par exemple il pourrait etre utilise a l'examen).

Exercice 1. On suppose que n est pair. Soit φ une isometrie de $\mathbb{R}^n$ qui est non-speciale.

1. Montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de φ et que les vecteurs propres associes sont perpendiculaires.
2. Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de φ est de la forme

$$M_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & M_{n-2} \end{pmatrix},$$

   avec $M_{n-2} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Etant donne φ une application lineaire. On definit $\det(\varphi)$ (le determinant de φ) et $\mathrm{tr}(\varphi)$ (la trace de φ) comme etant le determinant (resp. la trace) de la matrice $M_{B,\varphi}$ de φ dans une base B *quelconque* de $\mathbb{R}^3$ (pas forcement la base canonique ou une base orthonormee) :

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(M_{B,\varphi}),\ \det(\varphi) = \det(M_{B,\varphi}).$$

1. Montrer que les notations $\det(\varphi)$ et $\mathrm{tr}(\varphi)$ sont toutes deux bien definies (ie. ces quantites ne dependent pas du choix de la base B).
2. On supppose que φ est une isometrie de $\mathbb{R}^n$. Montrer par recurrence (en utilisant le cours et l'exercice precedent que $\mathrm{tr}(\varphi) \in [-n, n]$.

Exercice 3. (Criteres matriciels pour reconnaitre une isometrie de $\mathbb{R}^3$.) On connait la forme de la matrice d'une isometrie φ dans une BO convenable, mais souvent ce dont on dispose c'est de la matrice $M_{0,\varphi}$ de l'isometrie φ dans la base canonique. Dans cet exercice on explicite des criteres donnant des indices sur la nature de φ a partir de la matrice $M_{0,\varphi}$.

1. Montrer que si φ est une rotation, sa trace appartient a l'intervalle $[-1, 3]$. Que dire si sa trace vaut 3 ? si elle vaut -1 ?

2. Montrer que si φ est une anti-rotation, sa trace appartient a l'intervalle $[-3, 1]$. Que dire si sa trace vaut -3 ? si elle vaut 1 ?
3. Que vaut $\mathrm{tr}(\varphi)$ is φ est une symetrie (par rapport a un plan).
4. Soit $M = M_{0,\varphi}$ la matrice de φ dans la base canonique. Montrer que φ est l'identite ou bien une symetrie (par rapport a un plan, une droite ou encore a l'origine) si et seulement si est une matrice symetrique : ie.

$$^tM = M.$$

Pour cela on considerera la matrice de φ dans une base orthonormee convenable et on observera que la matrice de changement de base est elle aussi une matrice orthogonale.

5. Montrer que si φ est une symetrie, son type (identite, centrale, axiale, par rapport a un plan) est completement determine par sa trace.
6. Montrer que si M est une rotation ou une anti-rotation (d'axe $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ et d'angle $\mathrm{c} + \imath\mathrm{s}$ ou θ radians) on a

$$\mathrm{c} = \cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}M - \det(M)).$$

Cette formule permet donc de determiner $\pm\theta \pmod{2\pi}$ ou si on parle en terme de nombre complexes de module 1 de determine l'angle a conjugaison complex pres :$\mathrm{c} \pm \imath\mathrm{s}$).

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes determiner si elles sont orthogonales et si oui quel est la nature de l'isometrie qui leur correspond ; si c'est une symetrie determiner le plan, si c'est une (anti-)rotation determiner l'axe $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ (et le cosinus et sinus de l'angle). On pourra "debrousailler "le terrain en utilisant l'exercice precedent.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & -12 & -20 \\ -20 & 15 & 0 \\ -12 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit φ et ψ deux isometries affines de parties lineaires φ_0 et ψ_0.

1. Montrer que si φ est d'un certain type (translation, rotation, vissage, symetrie centrale, axiale, planaire, glissee, anti-rotation) alors la conjuguee

$$\varphi' = \mathrm{Ad}(\psi)(\varphi) = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

est du meme type.

2. Montrer qu'en cas de rotation, anti-rotation ou vissage, l'angle est preserve au signe pres (si l'angle est le nombre complexe de module 1, z le nouvel angle sera $z^{\pm 1}$; ou si l'angle est exprime en radians $\theta \pmod{2\pi}$ le nouvel angle sera $\pm\theta \pmod{2\pi}$). Calculer l'axe de φ' en fonction de ψ et de l'axe de φ.
3. En general, quels sont les points fixes de φ' en fonction de ψ et de ceux de φ.

Exercice 6. Soit φ la transformation affine

$$\varphi(x, y, z) = (X, Y, Z)$$

avec

$$X = \frac{1}{9}(x - 8y + 4z) - 1$$

$$Y = \frac{1}{9}(4x + 4y + 7z) + 2$$

$$Z = \frac{1}{9}(-8x + y + 4z) + 2.$$

1. Determiner la nature de φ.
2. Meme question pour $\psi(x, y, z) = (X', Y', Z')$ avec

$$X' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 1$$

$$Y' = \frac{1}{3}(2x + y - 2z) - 1$$

$$Z' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) - 1.$$

3. Determiner la nature de $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$.

Exercice 7. 1. Determiner la matrice dans la base canonique de la rotation lineaire r d'angle $\pi/6$ et d'axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.

2. Soit l'isometrie affine $r' = t_{(1,0,-1)} \circ r$. Quelle est la nature de r', ces eventuels points fixes et calculer $(r')^{2018}$.
3. Meme question pour $r'' = t_{(2,2,2)} \circ r$.