EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2019

Série 11

Exercice 1. Soit φ et ψ deux isometries affines de $\mathbb{R}^3$ de parties lineaires φ_0 et ψ_0.

1. Montrer que si φ est d'un certain type (translation, rotation, vissage, symetrie centrale, axiale, planaire, glissee, anti-rotation) alors la conjuguee
$$\varphi' = \mathrm{Ad}(\psi)(\varphi) = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$
est du meme type.
2. Montrer qu'en cas de rotation, anti-rotation ou vissage, l'angle est preserve au signe pres (si l'angle est le nombre complexe de module 1, z le nouvel angle sera $z^{\pm 1}$; ou si l'angle est exprime en radians $\theta \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ le nouvel angle sera $\pm\theta \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$). Calculer l'axe de φ' en fonction de ψ et de l'axe de φ.
3. En general, quels sont les points fixes de φ' en fonction de ψ et de ceux de φ.

Exercice 2. Dans cet exercice on va realiser la reduction des isometries lineaire de $\mathbb{R}^n$, c'est a dire etant donner $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, on va montrer l'existence d'une BON ou la matrice de φ est simple.

Soit M la matrice de φ dans la base canonique. La matrice M appartient a $M_n(\mathbb{R})$ et on peut donc egalement la considerer comme une matrice a coefficients complexes.

1. On suppose que M possede une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ qui est NON-REELLE. Soit $\vec{v} \in \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}$ un vecteur propre associe (si $\vec{v}$ est ecrit comme un vecteur colonne, on a $M.\vec{v} = \lambda.\vec{v}$). Montrer que $\overline{\lambda}$ est valeur propre de $\vec{v}$ de vecteur propre $\overline{\vec{v}}$ (ici $\bar{\cdot}$ designe la conjugaison complexe).
2. On considere les vecteurs (colonnes) a coefficients reels
$$\vec{x} = \Re\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \overline{\vec{v}}),\ \vec{y} = \mathrm{Im}\,\vec{v} = \frac{1}{2i}(\vec{v} - \overline{\vec{v}}) \in \mathbb{R}^n.$$
Montrer que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont $\mathbb{R}$-lineairement independants et le sous-espace (reel) qu'ils engendrent est stable par φ.
3. Montrer que (sous l'hypothese ou M possede une valeur propre non-reelle) il existe une BON $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de φ peut s'ecrire sous la forme
$$M_{\mathcal{B},\varphi} = \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M_{n-2} \end{pmatrix}$$

avec $M_2 \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ une matrice 2×2 de rotation et $M_{n-2} \in O_{n-2}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de rang $n-2$. Quel est le determinant de M_{n-2} ?

4. Soit φ une isometrie lineaire generale, montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de φ est une matrice diagonale par blocs de la forme
$$M_{\mathcal{B},\varphi} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{r'} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M_{2,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M_{2,r''} \end{pmatrix}$$
avec $r + r' + 2r'' = n$ et les $M_{2,i},\ i = 1, \cdots, r''$ sont des matrices 2×2 de rotation.

Exercice 3. Soit $\vec{v} \neq 0$, on rappelle que l'application lineaire
$$s_{\vec{v}} : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \to \vec{u} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\vec{v}$$
est une isometrie non-speciale : la symetrie par rapport a l'hyperplan $\vec{v}^{\perp}$. On dira que $s_{\vec{v}}$ est une symetrie hyperplane.

On va montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$, le groupe des isometries lineaires de $\mathbb{R}^n$ est engendre par l'ensemble des symetries hyperplanes.

1. (Re)demontrer qu'une rotation lineaire de $\mathbb{R}^2$ se decompose en un produit de deux symetries lineaires.
2. A l'aide de la question precedente et de l'exercice precedent montrer que toute isometrie lineaire de $\mathbb{R}^n$ se decompose en produit d'au plus n symetries hyperplanes.

Exercice 4. 1. Montrer qu'une translation de $\mathbb{R}^n$ peut s'ecrire comme la composee de deux symetries hyperplanes (par rapport a des hyperplans affines).
2. En deduire que le groupe des isometries affines est engendre par l'ensemble des symetries hyperplanes (affines).

Exercice 5. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \cdots, n\}$. On associe a toute permutation
$$\sigma : i \in \{1, \cdots, n\} \mapsto \sigma(i) \in \{1, \cdots, n\},$$
l'application $\mathbb{R}$-lineaire φ_σ, telle que
$$\forall i = 1, \cdots, n \ \varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$
en d'autres termes pour $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$
$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i e_{\sigma(i)}.$$
Cette application est unique.

1. Montrer que $\det \varphi_\sigma = \mathrm{sign}(\sigma)$.
2. Montrer que φ_σ est une isometrie et que l'application $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ est un morphisme de groupe a valeur dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)_{\mathbf{0}}$.
3. Montrer que $(1, \cdots, 1) = \mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n$ est un vecteur invariant commun a tous les φ_σ.
4. Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout σ, la matrice $M_{\mathcal{B},\varphi_\sigma}$ de φ_σ dans cette base est de la forme
$$M_{\mathcal{B},\varphi_\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1,\sigma} \end{pmatrix}$$
ou $M_{n-1,\sigma} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ est un matrice orthogonale de rang $n-1$. Que vaut $\det M_{n-1,\sigma}$.
5. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe injectif
$$\mathfrak{S}_n \hookrightarrow O_{n-1}(\mathbb{R}).$$
Ainsi le groupe symetrique a n elements se realise comme un groupe fini d'isometries et que son image par l'application determinant est le groupe $\{\pm 1\}$.
6. Montrer que le groupe $\mathfrak{S}_3$ est dihedral.
7. Montrer que tout groupe fini d'ordre n peut se realiser comme un sous-groupe d'isometries lineaires contenu dans $O_{n-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. On considere le cas $n = 4$ dans l'exercice precedent. Si $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on defini
$$\mathbf{e}'_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$$
$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),\ \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4),\ \mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4).$$

1. Montrer que $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ est une BON de $V = \mathbf{e}'^{\perp}_4$. Ainsi V est identifie a l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ grace au choix de cette base.
2. D'apres l'exercice precedent l'application
$$\sigma \in \mathfrak{S}_4 \to M_{3,\sigma} \in O_3(\mathbb{R})$$
qui a σ associe $M_{3,\sigma}$ la matrice de la restriction de φ_σ a V dans la base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ est un morphisme de groupe injectif de $\mathfrak{S}_4$ dans $O_3(\mathbb{R})$.
3. Determiner les isometries de $\mathbb{R}^3$ correspondant aux matrices $M_{3,\sigma}$ quand
$$\sigma = (12),\ \sigma = (123),\ \sigma = (1234),\ \sigma = (12)(34).$$
On rappelle (decomposition en cycles disjoints d'une permutation) que toute permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ non-triviale est conjuguee a l'une de ces 4 permutations. On a ainsi decrit les isometries correspondant a toutes les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_4$.