EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2019

Série 13

Les exercices suivants portent sur la formule de Burnside. On pourra se reporter a la derniere serie du semestre precedent pour des cas simples d'utilisation de la formule de Burnside pour compter les coloriages.

Les deux premiers exercices sont des cas particuliers du dernier.

Exercice 1. Une entreprise de jeux de societe veut vendre des dès cubiques dont les faces sont colorees (deux faces distinctes peuvent avoir la meme couleur).

1. Elle dispose d'une palette de 3 couleurs. Montrer qu'elle pourra proposer 57 modeles. On commencera par rappeler les diverses rotations laissant un cube invariant notamment leur axe et leur ordre.
2. Plus generalement si elle dispose d'une palette de n couleurs, combien de modeles differents pourra-t-elle proposer ?

Exercice 2. Un dodécaèdre tronqué est un dodécaèdre régulier (12 faces, 30 arètes, 20 sommets) (cf. Figure 1) qu'on a coupé au niveau des sommets pour former des triangles équilateraux, les faces pentagonales devenant des décagones réguliers (voir Figure 2) .

1. Remplir le tableau ci-dessous (ajouter des lignes si nécéssaire) avec les données des différents types de rotations qui préservent le dodécaèdre régulier : type de point par lequel passe l'axe (en plus du centre du dodécaèdre), ordre et nombre de rotations de chaque type ; pour vous aider on a déjà remplit une des lignes (par définition l'axe de la rotation Identité passe "partout").

Axe passant par	Ordre	Nombre
Partout	1	1

2. On dispose de m couleurs pour colorier les faces triangulaires et de n couleurs pour les faces décagonales. Combien de modèles de dodécaèdres tronqués est-il possible de fabriquer ?

Exercice 3 (La formule de Polya (simplifiee))**.** Soit $G \circlearrowleft X$ un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal m. Soit $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ un ensemble de n couleurs ; avec ces n couleurs on peut colorier chacun des elements de X et on note C^X l'ensemble des coloriages possibles : en effet se donner un coloriage de X est equivalent a se donner d'une application $col : X \mapsto C$ qui a a chaque element x de X associe sa couleur $col(x)$ et l'ensemble des coloriages possibles est en bijection avec l'ensemble C^X des applications de X vers C.

Comme le groupe G agit sur X, il agit l'ensemble des coloriages de X : la formule de Polya permet de calculer le nombre d'orbites de $G \circlearrowleft C^X$.

Pour cela on a besoin d'introduire la fonction "nombre de cycles" (ou nombre d'orbites) d'un element $g \in G$ agissant sur X :

Définition 1. *Soit $G \circlearrowleft X$ un groupe fini agissant sur un ensemble X, et $g \in G$ un element de G, le nombre de cycles de g (relatif a l'action $G \circlearrowleft X$) est*

$$l_X(g) := |g^{\mathbb{Z}} \backslash X|,$$

le nombre d'orbites dans X du sous-groupe $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}}$ de G engendre par g.

Par exemple si $g = e_G$, $g^{\mathbb{Z}} = \{e_G\}$ est le groupe trivial qui possede exactement $m = |X|$ orbites (chaque point de X).

1. Montrer que si col est un coloriage de X qui est un point fixe sous l'action de g alors les elements de tout orbite de $g^{\mathbb{Z}}$ dans X sont tous d'une meme couleur. Montrer que le nombre de points fixes de $g \in G$ agissant sur C^X vaut $n^{l_X(g)}$.
2. En deduire la formule de Polya (simplifiee)
$$|G \backslash C^X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{l_X(g)}.$$
3. Montrer que le nombre de G-orbites de l'ensemble des coloriages de X ayant au plus n couleurs est un polynome en n de degre $\leqslant m$.
4. Retrouver les resultats des exercices precedents.

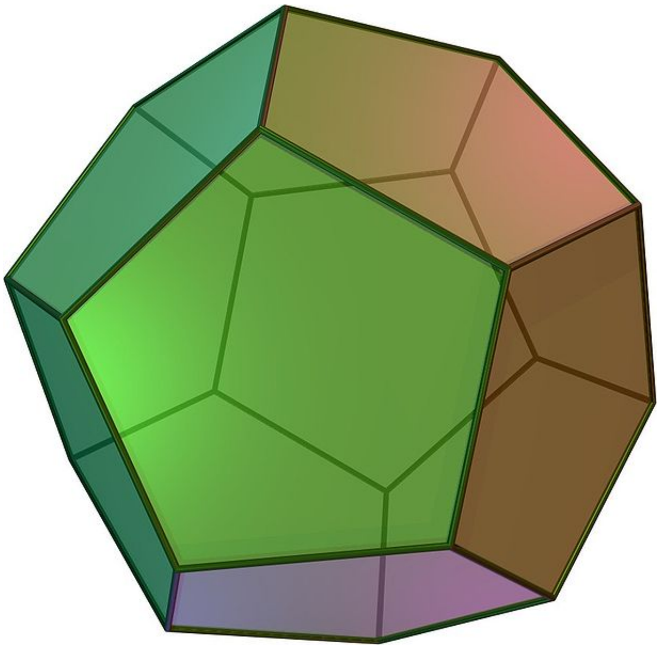

FIGURE 1 – Un dodécaèdre régulier

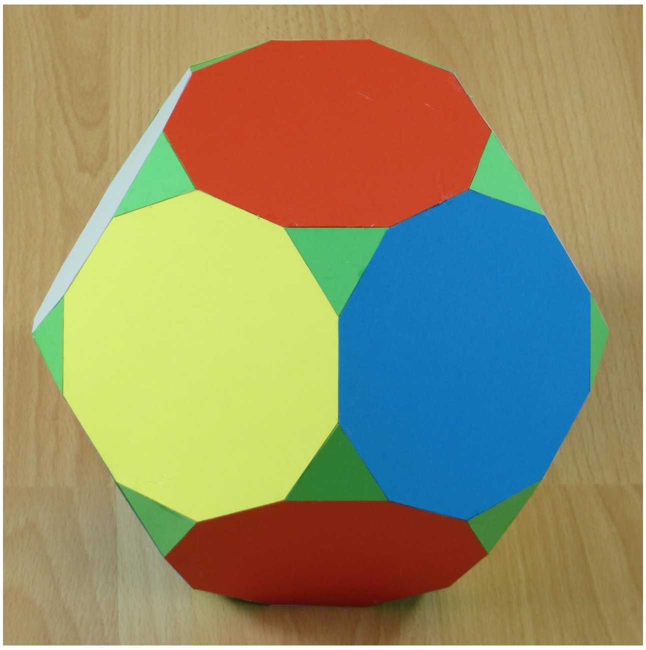

FIGURE 2 – Un dodécaèdre tronqué