EPFL
Geometrie, MATH-125

Printemps 2019

Série 13 & 14

Les exercices suivants portent sur la formule de Burnside. On pourra se reporter a la derniere serie du semestre precedent pour des cas simples d'utilisation de la formule de Burnside pour compter les coloriages.

Les deux premiers exercices sont des cas particuliers du dernier.

Exercice 1. Une entreprise de jeux de societe veut vendre des dès cubiques dont les faces sont colorees (deux faces distinctes peuvent avoir la meme couleur).

1. Elle dispose d'une palette de 3 couleurs. Montrer qu'elle pourra proposer 57 modeles. On commencera par rappeler les diverses rotations laissant un cube invariant notamment leur axe et leur ordre.
2. Plus generalement si elle dispose d'une palette de n couleurs, combien de modeles differents pourra-t-elle proposer ?

Exercice 2. Un dodécaèdre tronqué est un dodécaèdre régulier (12 faces, 30 arètes, 20 sommets) (cf. Figure 1) qu'on a coupé au niveau des sommets pour former des triangles équilateraux, les faces pentagonales devenant des décagones réguliers (voir Figure 2) .

1. Remplir le tableau ci-dessous (ajouter des lignes si nécéssaire) avec les données des différents types de rotations qui préservent le dodécaèdre régulier : type de point par lequel passe l'axe (en plus du centre du dodécaèdre), ordre et nombre de rotations de chaque type ; pour vous aider on a déjà remplit une des lignes (par définition l'axe de la rotation Identité passe "partout").

Axe passant par	Ordre	Nombre
Partout	1	1

2. On dispose de m couleurs pour colorier les faces triangulaires et de n couleurs pour les faces décagonales. Combien de modèles de dodécaèdres tronqués est-il possible de fabriquer ?

Exercice 3 (La formule de Polya (simplifiee))**.** Soit $G \circlearrowright X$ un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal m. Soit $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ un ensemble de n couleurs ; avec ces n couleurs on peut colorier chacun des elements de X et on note C^X l'ensemble des coloriages possibles : en effet se donner un coloriage de X est equivalent a se donner d'une application $col : X \mapsto C$ qui a a chaque element x de X associe sa couleur $col(x)$ et l'ensemble des coloriages possibles est en bijection avec l'ensemble C^X des applications de X vers C.

Comme le groupe G agit sur X, il agit l'ensemble des coloriages de X : la formule de Polya permet de calculer le nombre d'orbites de $G \circlearrowright C^X$.

Pour cela on a besoin d'introduire la fonction "nombre de cycles" (ou nombre d'orbites) d'un element $g \in G$ agissant sur X :

Définition 1. *Soit $G \circlearrowright X$ un groupe fini agissant sur un ensemble X, et $g \in G$ un element de G, le nombre de cycles de g (relatif a l'action $G \circlearrowright X$) est*

$$l_X(g) := |g^{\mathbb{Z}} \backslash X|,$$

le nombre d'orbites dans X du sous-groupe $\langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}}$ de G engendre par g.

Par exemple si $g = e_G$, $g^{\mathbb{Z}} = \{e_G\}$ est le groupe trivial qui possede exactement $m = |X|$ orbites (chaque point de X).

1. Montrer que si col est un coloriage de X qui est un point fixe sous l'action de g alors les elements de tout orbite de $g^{\mathbb{Z}}$ dans X sont tous d'une meme couleur. Montrer que le nombre de points fixes de $g \in G$ agissant sur C^X vaut $n^{l_X(g)}$.
2. En deduire la formule de Polya (simplifiee)
$$|G \backslash C^X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{l_X(g)}.$$
3. Montrer que le nombre de G-orbites de l'ensemble des coloriages de X ayant au plus n couleurs est un polynome en n de degre $\leqslant m$.
4. Retrouver les resultats des exercices precedents.

Exercice 4. Dans le cours on a discute divers groupes finis de rotations lineaires $G_{\mathbf{P}}$ egaux a $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et on a vu qu'ils preservent un polytope regulier $\mathbf{P}$, soit le tetrahedre, soit le cube ou l'octahedre, soit le dodecahedre ou l'icosahedre.

Un des (nombreux) faits que l'on n'a pas demontre est que chacun de ces groupes est precisement le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0P}}$ des isometries speciales preservant le polytope $\mathbf{P}$.

C'est le but de cet exercice.

En fait on va montrer que le groupe de toutes les isometries (speciales ou non) preservant le polytope $\mathbf{P}$ est

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0P}} = \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ G_{\mathbf{P}} := G_{\mathbf{P}} \sqcup -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ G_{\mathbf{P}}$$

Pour cela on introduit la notion suivante :

Définition 2. *Soit* $\mathbf{P}$ *un polytope regulier (contenu dans la sphere unite) qui est soit le tetrahedre, le cube, l'octahedre, le dodecahedre ou l' icosahedre. Un drapeau de* $\mathbf{P}$ *est la donnee d'une triplet* (F, A, S) *ou* F *est une face de* $\mathbf{P}$*,* A *est une arete contenue dans la face* F*,* S *est un sommet contenu dans l'arete* A*.*

1. Remarquer que que pour chacun des polytopes regulier $\mathbf{P}$, $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est une isometrie qui preserve $\mathbf{P}$. En deduire que $\pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ G_{\mathbf{P}}$. est un groupe d'isometries qui preserve $\mathbf{P}$.
2. Verifier dans le cas du tetrahedre, du cube et de l'octahedre que le groupe $\pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ G_{\mathbf{P}}$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux de $\mathbf{P}$.
3. En utilisant cette propriete (valable pour tous les polytopes reguliers) montrer que
$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0},\mathbf{P}} = \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ G_{\mathbf{P}},$$
et en deduire que
$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0},\mathbf{P}} = G_{\mathbf{P}}.$$

Exercice 5. Soit $\mathbf{P}$ un des polytopes reguliers et $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0},\mathbf{P}}$ le groupe de toutes les isometries (speciales ou non) preservant $\mathbf{P}$.

1. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0},\mathbf{P}}$ est d'indice deux dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0},\mathbf{P}}$.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)_{\mathbf{0},\mathbf{P}} = \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)^+_{\mathbf{0},\mathbf{P}}$.

Exercice 6. On a vu que le groupe des rotations preservant l'octahedre regulier/le cube dont les sommets sont respectivement

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

etait isomorphe au groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$. Donner la matrice dans la base canonique d'une rotation de ce groupe correspondant a

1. une transposition,
2. a un cycle de longueur 3,
3. a un cycle de longeur 4.

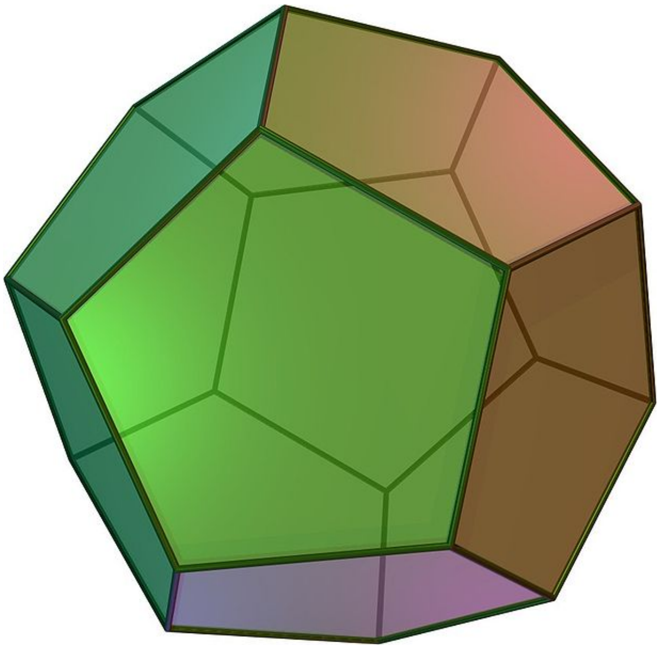

Figure 1 – Un dodécaèdre régulier

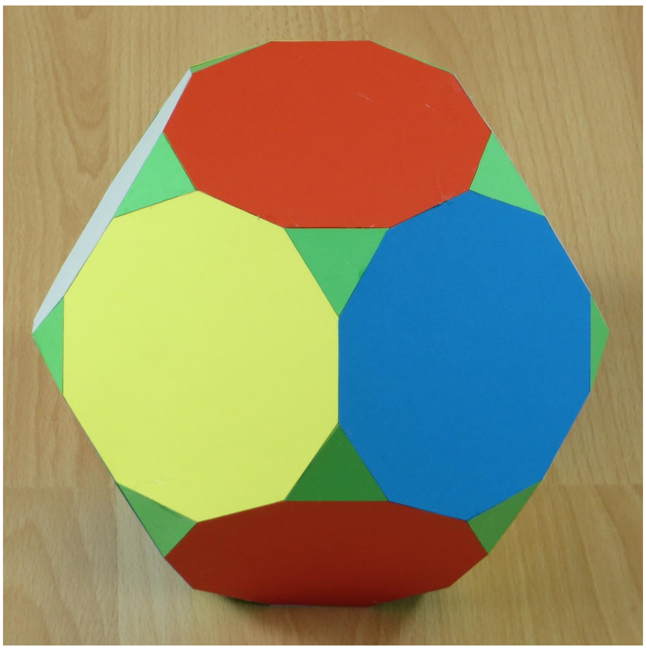

Figure 2 – Un dodécaèdre tronqué