EPFL Automne 2018

Geometrie, MATH-120

Série 2

On considere le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de ces fonctions distances $d(.,.)$, longueur $\|.\|$ et de son produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Exercice 1. Montrer que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

et que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

Exercice 2. Etant donne P, Q deux points, pourquoi le point $P + \frac{1}{2}\vec{PQ}$ s'appelle-t-il le milieu du segment $[PQ]$?

– Montrer que

$$[PQ] = \{R \in \mathbb{R}^2 | \ d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)\}.$$

– Comment pourrait-on appeler les ensembles

$$\{R \in \mathbb{R}^2 | \ d(P,R) - d(R,Q) = d(P,Q)\}$$

et

$$\{R \in \mathbb{R}^2 | \ -d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)\}?$$

Exercice 3 (Theoreme de l'hypothenuse)**.** Soient $P \neq Q$ deux points et $\mathcal{C}$ le cercle de centre le milieu de $[PQ]$ et de rayon $d(P,Q)/2$. Montrer que pour tout point $R \in \mathcal{C}$ le triangle $[PQR]$ est rectangle en R.

Exercice 4 (Triplets euclidiens)**.** $(\star)$ Un triplet d'entiers $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ est euclidien si

$$a^2 + b^2 = c^2 :$$

en d'autres termes si le triangle de cotes de longueurs entieres $|a|, |b|, |c|$ est rectangle. Par exemple $(1,0,1)$ est un triplet euclidien, $(3,4,5)$ en est un autre qu'on appelle *triplet des maçons* (pourquoi ?).

Montrer que tout triplet euclidien peut etre obtenu par la recette suivante (faire un dessin) :

1. Soit $\mathcal{C} = C(\mathbf{0}, 1)$ le cercle unite centre en l'origine et $P = (-1, 0) \in \mathcal{C}$,
2. Montrer que pour tout nombre rationnel $\lambda \in \mathbb{Q}$ la droite $D(P, \lambda)$ passant par P et de pente λ intersecte $\mathcal{C}$ en exactement deux points P et Q_λ et que les coordonnes de ce dernier sont des nombres rationels (x_λ, y_λ).
3. Montrer que (x_λ, y_λ) peut toujours se mettre sous la forme $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (et ce de multiples manieres) et que (a, b, c) est un triplet euclidien.

Exercice 5. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non-nuls et orthogonaux ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$).

On a vu que tout vecteur $\vec{w}$ s'ecrit de maniere unique sous la forme

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v},\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

avec des expression explicites pour α et β.

1. Soit $\mathrm{Proj}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'application

   $$\mathrm{Proj}_{\vec{v}} : \vec{w} \mapsto \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

   Montrer que $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}$ est lineaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \vec{w}, \vec{w}' \in \mathbb{R}^2$

   $$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\lambda.\vec{w} + \vec{w}') = \lambda.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) + \mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}').$$

   calculer son image et son noyau. Calculer $\mathrm{Proj}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Proj}_{\vec{v}}$.
2. Montrer que $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}$ ne depend en fait que de la droite $(\vec{v}) = \mathbb{R}.\vec{v}$ et non du vecteur (non-nul) $\vec{v}$ contenu dans cette droite. On appelle-t-on $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}$ la *projection orthogonale sur la droite* $(\vec{v})$, pourquoi ?
3. Soit $\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, l'application

   $$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}).$$

4. Montrer que $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est une isometrie lineaire et calculer

   $$\mathrm{sym}_{\vec{v}} \circ \mathrm{sym}_{\vec{v}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

5. Montrer que $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ ne depend en fait que de la droite $(\vec{u}) = \mathbb{R}.\vec{u}$ et non du vecteur (non-nul) $\vec{u}$ contenu dans cette droite. On appelle-t-on $\mathrm{sym}_{\vec{v}}$ la *symetrie orthogonale par rapport a l'axe* $(\vec{u})$, pourquoi ?

Exercice 6. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ et $a > 0$. On definit le polynome (homogene) de degre 2

$$Q(X, Y) = aX^2 + bXY + Y^2.$$

On obtient donc une fonction

$$Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ \vec{u} = (x, y) & \mapsto & Q(P) = Q(x, y) \end{array}$$

(ici un vecteur $\vec{u}$ du plan est repere par ces coordonnees dans la base canonique.) On defini une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_Q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mathbb{R}.$$

par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_Q := \frac{1}{4}(Q(\vec{u} + \vec{v}) - Q(\vec{u} - \vec{v})).$$

1. Que vaut $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_Q$?
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ est un produit scalaire (defini-positif) sur $\mathbb{R}^2$. On pose alors

   $$\| \cdot \|_Q : \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_Q^{1/2}$$

   et

   $$d_Q(\cdot, \cdot) : (R, S) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \|\vec{RS}\|_Q.$$

3. Montrer que inegalite de Cauchy-Schwarz est vraie :

   $$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_Q| \leqslant \|\vec{u}\|_Q \|\vec{v}\|_Q$$

   avec egalite si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnels.
4. Montrer que d_Q definit une distance sur $\mathbb{R}^2$. Si $a = b = c = 1$ dessiner la boule unite $B(0, 1)_Q$.
5. Dans le cas general, etant donne deux points R, S, on definit le "segment" relativement a la distance d_Q par

   $$[R, S]_Q = \{T \in \mathbb{R}^2 |\ d_Q(R, T) + d_Q(T, S) = d_Q(R, S)\}.$$

   Quelle est la forme de ce Q-segment ?
6. Montrer que pour tout $\vec{u} \neq \mathbf{0}$, il existe $\vec{v} \neq 0$ tel que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_Q = 0$ (on dira que $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Montrer qu'alors pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

   et calculer λ, μ en fonction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$.