EPFL Automne 2018
Geometrie, MATH-120

Série 4

Exercice 1. Lesquelles de ces matrices sont des matrices d'isometries. Pour celles qui le sont, lesquelles sont speciales ou non-speciales.

$$\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls et perpendiculaires. On a defini dans la series 2 une isometrie lineaire

$$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$

1. Ecrire la matrice de $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ dans la base canonique en fonction des coordonnees de $\vec{v}$.
2. Verifie que cette matrice a bien la forme d'une matrice orthogonale comme decrite dans le cours. Est-ce une isometrie speciale ou non ?

Exercice 3. Soit σ_0 la symetrie orthogonale par rapport a la droite d'equation

$$2x + 3y = 0.$$

1. Donner un vecteur non-nul, a coordonnees entieres premieres entre elles et perpendiculaire a cette droite.
2. Montrer que σ_0 peut s'ecrire sous la forme

$$\sigma_0 : \vec{w} \to \sigma_0(\vec{w}) = \vec{w} - 2\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$

avec $\vec{v}$ un vecteur non-nul convenable ($\vec{v}$ n'est pas forcement unique)

3. Ecrire la matrice M_{σ_0} de l'application lineaire σ_0 dans la base canonique. Que vaut $M_{\sigma_0} \times M_{\sigma_0}$.
4. Soit $\sigma = t_{(2,3)} \circ \sigma_0$: montrer que c'est une isometrie (affine). Quelle est sa partie lineaire ?
5. Montrer que si on pose $P = (x, y)$ et $(X, Y) = \sigma(P)$ alors on a

$$X = \alpha + ax + by$$
$$Y = \beta + cx + dy$$

avec $\alpha, \beta, a, b, c, d$ des reels convenables.

6. Quel est l'ensemble des points fixes de σ (ie. l'ensemble des $P \in \mathbb{R}^2$ verifiant $\sigma(P) = P$?) Comment s'appelle l'isometrie σ ?

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application lineaire.

1. Montrer qu'il existe une unique application lineaire $\varphi^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi^*(\vec{v}) \rangle.$$

   Pour ce faire, on supposera qu'une telle application existe et on calculera les coefficients des images $\varphi^*(\mathbf{e}_1), \varphi^*(\mathbf{e}_2)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. L'application φ^* est appelle l'adjoint de φ

2. Au vu de la formule d'adjonction, que vaut φ^* si φ est une isometrie lineaire ?
3. En utilisant la definition de l'adjoint (en particulier l'unicite), montrer que

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*,\ (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*,\ (\lambda.\varphi)^* = \lambda.\varphi^*,\ (\varphi^*)^* = \varphi$$

   et que si $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ alors $\varphi^* \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ et que

$$(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}.$$

4. Soit M_φ la matrice de φ dans la base canonique, montrer que

$$M_{\varphi^*} = {}^tM_\varphi.$$

5. Montrer de deux manieres differentes les relations suivantes entre deux matrices $M, N \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et leurs transposees.

$${}^t(M + N) = {}^tM + {}^tN,\ {}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM,\ {}^t(\lambda.M) = \lambda.{}^tM,\ {}^t({}^tM) = M$$

   et si M est inversible (ie. il existe une matrice N telle que $M.N = N.M = \mathrm{Id}_2$)

$${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}.$$

6. Montrer que $\det({}^tM) = \det(M)$.