Série 6

Exercice 1 (Reprise de l'exercice 9 de la feuille 4-5)**.** Soit $G = G_{\mathcal{P}}$ un groupe cristallographique et G^+ son sous-groupe des rotations et $T_G = T(\Gamma) \in G^+$ son reseau des translations. On note G_0 l'image de G par le morphisme partie lineaire et G_0^+ celle de G^+. On suppose que $G \neq G^+$ et on note s un element de $G - G^+$ (si il existe). On note s_0 sa partie lineaire.

1. Montrer que T_G et G^+ sont distingues dans G.
2. Montrer que G/G^+ est d'ordre $\leqslant 2$.
3. Montrer que en general l'indice G/T_G est d'ordre $\leqslant 12$.
4. Quelle sont les structures possible du groupe G_0 et quelles sont les valeurs possible de son ordre suivant qu'il existe ou pas un $s \in G - G^+$?
5. On suppose qu'il existe $s \in G - G^+$. Montrer que $s^2 \in T(\Gamma)$.
6. Montrer que s se decompose sous la forme $t_\gamma \circ s'$ avec s' une symetrie axiale d'axe parallele a γ et que $\gamma \in \frac{1}{2}\Gamma$.
7. soit s_0 la partier lineaire de s. Montrer que $s_0(\Gamma) = \Gamma$ (conjuguer !).
8. On suppose (quitte a conjuguer G par un element convenable) que $\Gamma = \mathbb{Z}.1 + \mathbb{Z}\gamma_1$ avec $(1, \gamma_1)$ satisfaisant les proprietes de minimalite du cours. On a meme vu qu'on peut suppper que γ_1 appartient au domaine fondamental $\mathcal{D}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Montrer que si $|\gamma_1| > 1$ alors $s_0(1) = \pm 1$.
9. Si $s_0(1) = -1$ que dire de $\Re e\gamma_1$?

Exercice 2. On dit que deux paires de points d'un espace affine X, (P, Q), (R, S) sont equipolents si
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}.$$
Montrer qu'alors
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}.$$
(On dit alors que le quadruple $[PQRS]$ forme un parallelogramme.)

Exercice 3. Soient X un espace affine de dimension d et
$$P_0, \cdots, P_d \in X$$
$d+1$ points en position generale (tels que $(\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_d})$ forment une base de V).

1. Montrer que pour tout point $P \in X$ il existe un unique $d+1$-uplet
$$(\lambda_0, \cdots, \lambda_d) \in k^{d+1}$$
tel que
$$\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 1$$
et tel que
$$P = Bar(P_0, \cdots, P_d; \lambda_0, \cdots, \lambda_d).$$
Le $d+1$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_d)$ forme les coordonnees barycentrique de P dans la base affine $(P_0, \cdots, P_d)$.
2. Reciproquement soit $n \geqslant 0$ et
$$P_0, \cdots, P_n \in X$$
tels que pour tout point $P \in X$ il existe un unique $n+1$-uplet
$$(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in k^{n+1}$$
tel que
$$\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$$
et tel que
$$P = Bar(P_0, \cdots, P_d; \lambda_0, \cdots, \lambda_n).$$
Montrer qu'alors $n = d$ et que $P_0, \cdots, P_d$ sont en position generale.
3. Montrer que le fait d'etre en position general est independant de l'ordre dans lequel on ecrit les points : pour tout permutation $\sigma : \{0, \cdots, d\} \to \{0, \cdots, d\}$, le $d+1$-uplet $(P_{\sigma(0)}, \cdots, P_{\sigma(d)})$ est en position generale.

Exercice 4. Soit X un espace affine de direction V. Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble.

1. Montrer que les deux properietes suivantes (definissant un sous-espace affine) sont equivalentes :
   (a) Il existe $P \in X$ et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel tel que
   $$Y = P + W = \{P + \vec{w},\ \vec{w} \in W\}.$$
   (b) Il existe $n \geqslant 0$ et $P_0 = P, \cdots, P_n \in X$ tels que
   $$Y = \{Bar(P_0, \cdots, P_k; \lambda_0, \cdots, \lambda_n),\ \lambda_i \in k,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

2. Montrer qu'alors
$$W = \langle \vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n} \rangle$$
(le sev engendre par ces vecteurs) et que $n \geqslant \dim W$. Montrer que dans la deuxieme description on peut toujours se ramener au cas ou $n = \dim_k W$ et qu'alors dans la representation d'un point de Y comme barycentre des $(P_0, \cdots, P_n)$ les poids $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ sont uniquement definis : $(P_0, \cdots, P_n)$ forme une base affine de Y.
3. On suppose que Y est l'ensemble des barycentres des points $(P_0, \cdots, P_m)$ (donc $m \geqslant n = \dim_k(Y)$). Montrer qu'on peut extraire de $\{P_0, \cdots, P_m\}$ un sous-ensemble de $n+1$ points qui forment une base affine de Y.

Exercice 5. On considere $X = V = \mathbb{R}^3$

1. Soient
$$P_0 = (1,1,1), P_1 = (1,1,2),\ P_2 = (1,2,1),\ P_3 = (2,2,4).$$
Montrer que ces points sont en position generale. Donner les coordonnees barycentriques du point $(3,2,1)$ dans cette base affine.
2. Donner l'equation cartesienne du sous-espace affine defini par les points
$$Q_0 = (1,1,1), Q_1 = (1,1,2),\ Q_2 = (1,2,1),\ Q_3 = (1,2,4)$$
ainsi que celle de sa direction.
3. Soit Y d'equation
$$x + 2y + 3z = 4.$$
Representer Y comme l'ensemble des barycentres d'un nombre fini de points (trouver le nombre minimal possible des ces points).
4. Meme question pour Z d'equation cartesienne
$$x + 2y + 3z = 4,\ 2x + y + z = 3.$$