Rappels de calcul différentiel

Définition. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. On dit qu'une application $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ est *différentiable au sens de Fréchet* en $p \in U$ s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \ell(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1}$$

On peut écrire la condition (1) sous la forme

$$f(p+h) = f(p) + \ell(h) + o(h). \tag{2}$$

C'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ avec

$$||f(p+h) - f(p) - \ell(h)|| \le \epsilon ||h|| \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^m \text{ avec } ||h|| < \delta\,. \tag{3}$$

Définition. Une application $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est dite de *classe* C^k ($k = 1, 2, 3, ...$) si chaque composante f^j admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k. Elle est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k. Lorsque l'application est simplement continue, on dit qu'elle est de classe C^0.
On note $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k = 0, 1, 2, 3, ..., \infty$), observons que c'est un espace vectoriel sur le corps des réels.

Si $n = 1$, on note simplement $C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R})$; comme le produit de deux fonctions de fonctions de classe C^k est un fonction de classe C^k, l'espace $C^k(U)$ est une algèbre et non seulement un espace vectoriel.

Poposition Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, alors f est Fréchet différentiable en tout point de U, de plus la matrice de df en un point de U est la matrice Jacobienne, i.e. la matrice des dérivées partielles :

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

1.1. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ qui est Fréchet différentiable en un point est continue en ce point.

1.2. Démontrer la règle de dérivation en chaîne: Soient $U \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{R}^n$ deux ouverts et $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^s$ deux applications telles que f est Fréchet différentiable en $p \in U$ et g est Fréchet différentiable en $q = f(p) \in V$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^s$ est Fréchet différentiable en p et

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$$

1.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, p un point de U et $v \in \mathbb{R}^m$ un vecteur. Montrer que si $f \in C^1(U)$, alors

$$df_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

pour toute courbe et $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot\gamma(0) = v$.

1.4. Utiliser la règle de dérivation en chaîne pour prouver que s'il existe un difféomorphisme entre deux ouverts $U \in \mathbb{R}^m$ et $V \in \mathbb{R}^n$, alors $n = m$.

(en fait il n'existe pas non plus d'homéomorphisme si $n \neq m$, mais la preuve est plus compliquée).

1.5. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$(y^1, y^2) = f(x^1, x^2) = (x^1 \cos(x^2), x^2 - x^1 x^2).$$

Prouver que f est un difféomorphisme au voisinage de $(0, 0)$.

1.6. Montrer que l'opérateur de dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x^i}$ dépend de toutes les coordonnées d'un système $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Plus précisément, si on a deux systèmes de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ et $u^1, u^2, \ldots, u^n$ sur un même ouvert U, alors l'égalité $x^1 = u^1$ n'implique pas forcément $\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}$.

1.7. Les coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^3$ sont définies par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

i) Calculer le Jacobien de cette transformation.

ii) Décrire un domaine de l'espace (r, φ, θ) pour lequel ces formules décrivent un difféomorphisme.

1.8. *Lemme de Hadamard.*

(a) Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ étoilé[1] par rapport à un point $p \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega)$. Montrer qu'il existe des fonctions continues φ_i sur Ω telles que

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)(x_i - p_i)$$

et $\varphi_i(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

(b) On suppose maintenant que $f \in C^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe des fonctions continues ψ_{ij} sur Ω telles que

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(x)(x_i - p_i)(x_j - p_j)$$

et $\psi_{ij}(p) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$.

1.9. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 3 au point $(x, y) = (0, 0)$ de la fonction $f(x, y) = e^x \cos(y)$.

1.10. Soient $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. Montrer que le graphe de f

$$M = \Gamma_f := \{(x, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t = f(x)\} \subset \mathbb{R}^n$$

est une hypersurface (i.e. une sous variété de dimension $n - 1$).

[1] Rappelons que cela signifie que pour tout $x \in \Omega$, le segment $[p, x] = \{p + t(x - p) \mid t \in [0, 1]\}$ est contenu dans Ω.