2.1. Montrer, en trouvant un contre-exemple, qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable au sens de Fréchet n'est pas nécessairement de classe $C^1(U, \mathbb{R}^m)$.

2.2. Le but de cet exercice est de se familiariser avec la différentielle.

(a) Soit l'application $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(A) = A^3$. En s'inspirant de l'exemple vu en cours, calculer la différentielle $d\varphi_A(H)$ pour $A, H \in M_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire du cas particulier dans lequel A et H commutent?

(b) On considère deux applications $\varphi, \psi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$d(\varphi \cdot \psi)_A(H) = d\varphi_A(H)\psi(A) + \varphi(A)d\psi_A(H),$$

où $(\varphi \cdot \psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)$.

(c) Montrer grâce au point précédent que si $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est définie par $\varphi(A) = A^{-1}$, alors

$$d\varphi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

(d) On considère l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de det au point $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Indication: Procéder en trois étapes:

  (i) Supposer dans un premier temps que $A = I$;
  (ii) Supposer ensuite que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, i.e. que A est inversible;
  (iii) Finalement, conclure en utilisant le fait que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + tI$ est inversible pour t suffisamment petit.

(e) On considère maintenant de l'application *inversion de centre* $p \in \mathbb{R}^n$ *et de module* $k \neq 0$, i.e. l'application $f : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ définie par

$$f(x) = k\frac{x - p}{\|x - p\|^2}.$$

Calculer la différentielle $df_x(h)$.

2.3. On considère la situation suivante: Il s'agit d'un bras articulé fixé à l'origine constitué de deux segments de longueurs l_1 et l_2. Déterminer la position du point (x, y) en fonction de l_1, l_2, θ_1 et θ_2. Calculer ensuite la matrice jacobienne de cette transformation. Quels sont les points critiques de la différentielle de cette transformation, i.e. quels sont les points où la différentielle n'est pas de rang maximal?

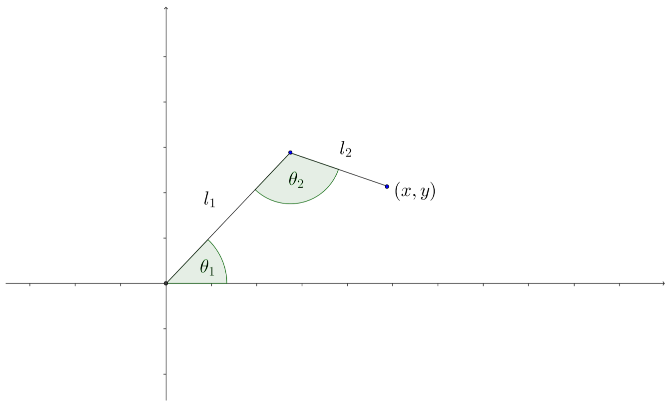
2.4. (a) Montrer que tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont difféomorphes (de classe C^∞) entre eux, et difféomorphes à $\mathbb{R}$.

(b) En utilisant le point (a), montrer que toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne) est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer qu'un homéomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut ne pas être un difféomorphisme.

2.5. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel réel de dimension finie V. Montrer que ces deux normes sont équivalentes, i.e. montrer qu'il existe une constante réelle $c > 0$ telle que pour tout $v \in V$

$$\frac{1}{c}\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c\|v\|_2.$$



l_2
θ_2
(x, y)
l_1
θ_1