2.1. *Solution:* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sa différentielle vaut 0 au point $(0,0)$ et donc f est différentiable. Ensuite, on calcule d'une part les dérivées partielles de f au point $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/|h|)-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(1/|h|) = 0.$$

De façon analogue on trouve $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Mais d'autre part si on calcule les dérivées partielles en un point $(x,y) \neq (0,0)$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

or si l'on approche $(0,0)$ sur l'axe réel (i.e. $(x,0) \to (0,0)$) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= 2x\sin(1/|x|) - \frac{x}{|x|}\cos(1/|x|) \\ &= 2x\sin(1/|x|) - \operatorname{sign}(x)\cos(1/|x|) \end{aligned}$$

qui ne converge pas lorsque $x \to 0$. Ainsi les dérivées partielles de f ne sont pas continues en $(0,0)$ et donc $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

2.2. *Solution:*

(a) On calcule $\varphi(A+H)$:

$$\begin{aligned} \varphi(A+H) = (A+H)^3 &= A^3 + A^2H + AHA + AH^2 + HA^2 + HAH + H^2A + H^3 \\ &= A^3 + A^2H + AHA + HA^2 + o(\|H\|), \end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi(A+H) - \varphi(A) = A^2H + AHA + HA^2 + o(\|H\|) \Rightarrow d\varphi_A(H) = A^2H + AHA + HA^2.$$

De plus, si A et H commutent, i.e. si $AH = HA$, alors $d\varphi_A(H) = 3A^2H$.

(b) A nouveau on calcule à partir de la définition:

$$\begin{aligned} (\varphi\cdot\psi)(A+H) - (\varphi\cdot\psi)(A) &= \varphi(A+H)\psi(A+H) - \varphi(A)\psi(A) \\ &= (\varphi(A) + d\varphi_A(H) + o(\|H\|))\,(\psi(A) + d\psi_A(H) + o(\|H\|)) - \varphi(A)\psi(A) \\ &= \varphi(A)d\psi_A(H) + d\varphi_A(H)\psi(A) + o(\|H\|), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $d\varphi_A(H)d\psi_A(H) = o(\|H\|)$ puisque $d_A\varphi$ et $d_A\psi$ sont des applications linéaires et donc leur produit est quadratique en $\|H\|$. Ainsi on a montré

$$d(\varphi\cdot\psi)_A(H) = \varphi(A)d\psi_A(H) + d\varphi_A(H)\psi(A).$$

(c) Il suffit de prendre les applications suivantes $\varphi(A) = A^{-1}$ et $\psi(A) = A$ et appliquer ce que l'on vient de démontrer. Comme $\varphi \cdot \psi(A) = I$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a que l'application $\varphi \cdot \psi$ est constante et donc

$$0 = d(\varphi \cdot \psi)_A(H) = \varphi(A) d\psi_A(H) + d\varphi_A(H)\psi(A) = A^{-1}H + d\varphi_A(H)A,$$

d'où

$$d\varphi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

(d) Supposons d'abord que $A = I$. Alors

$$\begin{aligned} \det(I + H) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)(\delta_{\sigma(1)1} + h_{\sigma(1)1}) \cdot \ldots \cdot (\delta_{\sigma(n)n} + h_{\sigma(n)n}) \\ &= \delta_{11} \ldots \delta_{nn} + \sum_{i=1}^{n} h_{ii} + \text{termes de degré} \geq 2 \text{ en } h_{ij} \\ &= 1 + \mathrm{Tr}(H) + o(\|H\|) \\ &= \det(I) + \mathrm{Tr}(H) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

D'où $d\det_I(H) = \mathrm{Tr}(H)$. Supposons ensuite que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors par multiplicativité du déterminant on a

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det(A(I + A^{-1}H)) \\ &= \det(A)(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)) \\ &= \det(A) + \mathrm{Tr}(\det(A)A^{-1}H) + o(\|H\|) \\ &= \det(A) + \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^T H) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

Ainsi $d\det_A(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^T H)$. Finalement, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est quelconque, alors pour $t > 0$ suffisamment petit, la matrice $A+tI$ est inversible (à méditer!). Or par continuité, on a évidemment

$$\mathrm{Cof}(A + tI) \xrightarrow{t \to 0} \mathrm{Cof}(A),$$

donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A + tI)^T H) \longrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^T H)$ et on a obtenu en toute généralité la différentielle du déterminant:

$$d\det_A(H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)^T H).$$

(e) Supposons dans un premier temps que $p = 0$. Alors, l'application $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'écrit $f(x) = k\frac{x}{\|x\|^2}$. Cette application étant une composition de fonctions C^1 (sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) elle est C^1 et donc sa différentielle est donnée par sa matrice jacobienne. Il faut donc calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)$. On a $f^i(x) = k\frac{x^i}{\|x\|^2}$ et donc

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) = k\frac{\delta^i_j \|x\|^2 - 2x^i x^j}{\|x\|^4},$$

Ainsi

$$df_x(h) = k\frac{h}{\|x\|^2} - k\frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}x.$$

Ensuite, si $g(x) = x - p$, on obtient le résultat en appliquant la règle de dérivation en chaîne pour trouver la différentielle de $(f \circ g)(x) = k\frac{x-p}{\|x-p\|^2}$

2.3. *Solution:* Par un raisonnement de trigonométrie élémentaire on montre que les coordonnées du point (x, y) en fonction des angles et des longueurs des segments valent

$$(x(\theta_1, \theta_2), y(\theta_1, \theta_2)) = (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \pi), l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \pi)) .$$

La transformation recherchée est $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \pi), l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \pi)) .$$

La matrice jacobienne de ψ vaut

$$J_\psi(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \pi) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \pi) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \pi) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \pi) \end{pmatrix} .$$

Et son déterminant vaut donc

$$\det(J_\psi(\theta_1, \theta_2)) = l_1 l_2 (\cos\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \pi) - \sin\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \pi)) .$$

Pour trouver les points critiques de la différentielle, il faut résoudre $\det(J_\psi(\theta_1, \theta_2)) = 0$.

2.4. *Solution:*

(a) Il est clair que tous les intervalles ouverts bornés sont difféomorphes entre eux (ils sont difféomorphes via une application affine). De même, il est clair que les intervalles de la forme (a, ∞) ou $(-\infty, b)$ sont difféomorphes entre eux. Il suffit donc de montrer qu'on a un difféomorphisme de $(0, \infty)$ sur $\mathbb{R}$ et de $(-1, 1)$ sur $\mathbb{R}$. On a par exemple que les applications suivantes

$$\begin{aligned} \varphi &: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = e^t, \\ \psi &: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{t}{1 - t^2} \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes.

(b) En s'inspirant du difféomorphisme entre la boule unité ouverte de $\mathbb{R}$, i.e. $(-1, 1)$ vers $\mathbb{R}$ défini au point (a), on voit que

$$\psi(x) = \frac{x}{1 - \|x\|^2}$$

est un difféomorphisme de $B(0, 1)$ sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Considérons l'application $f(x) = x^3$. Il est évident que c'est un homéomorphisme C^∞, par contre sa différentielle vaut $f'(x) = 3x^2$ et s'annule donc au point $x = 0$. Elle n'est donc pas inversible, ce qui montre que f n'est pas un difféomorphisme.

2.5. *Solution:* C.f. Analyse II.