Exercice 3.1. Démontrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ de rang constant $= r$, alors pour tout point $q \in \mathbb{R}^n$ l'image inverse $f^{-1}(q) \subset U$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$ (qui peut être vide). Quelle est sa dimension ?

Exercice 3.2. Soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions C^∞ définies sur $U \subset \mathbb{R}^m$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Supposons les différentielles $df_1, \ldots df_k$ sont linéairement indépendantes en tout point p de U. Montrer que

$$M = \{x \in U \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}$$

est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 3.3. Démontrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ de rang constant $= r$, alors tout point $p \in U$ admet un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que l'image directe $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?

Montrer par un exemple que $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas toujours une sous-variété, même si f est injective (voir exercice 3.7 ci-dessous).

Exercice 3.4. Prouver le théorème d'inversion locale à partir du théorème du rang constant.

Exercice 3.5. Prouver le théorème des fonctions implicites à partir du théorème du rang constant. Ce théorème s'énonce ainsi : *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ où $m = n + k$. Soit p un point de U et supposons que la matrice Jacobienne partielle (de taille $n \times n$)*

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i \leq n,\, (k+1) \leq j \leq m}$$

soit inversible en p. Montrer qu'il existe un voisinage de p de type $V \times W \subset U$ avec $V \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in V \times W$ on a

$$f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad (x_{k+1}, \ldots, x_m) = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$$

où $q = f(p)$.
(Suggestion : Commencer par réécrire l'énoncé avec $m = 2$, $k = n = 1$ pour bien comprendre la situation).

Exercice 3.6. Prouver les affirmations suivantes:

(a) La sphère
$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$
est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ engendré par révolution autour de l'axe Oy du cercle de centre $(a, 0, 0)$ et de rayon r du plan Oxy est une-sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a > r$.

(c) Le cône épointé
$$C^* := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$
est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Qu'en est-il du cône avec la pointe, i.e.

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}?$$

(d) L'ensemble des matrices orthogonales

$$O(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R} \mid M^T = M^{-1}\}$$

est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.7. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$t \mapsto \left(\frac{\sin 2t}{1+\cos^2 t}, \frac{2\sin t}{1+\cos^2 t}\right)$$

est une immersion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ périodique de période 2π (on rappelle que $f : U \to \mathbb{R}^n$ une immersion si df_p est injective en tout point $p \in U$).
Montrer ensuite que $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ mais que par contre, l'image de tout intervalle de longueur inférieure à π en est une.