Exercice 4.1. Prouver le théorème d'inversion locale à partir du théorème du rang constant.

Exercice 4.2. Prouver le théorème des fonctions implicites à partir du théorème d'inversion locale. Ce théorème s'énonce ainsi : *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ où $m = n + k$. Soit p un point de U et supposons que la matrice Jacobienne partielle (de taille $n \times n$)*

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1\leq i\leq n,\,(k+1)\leq j\leq m}$$

soit inversible en p. Montrer qu'il existe un voisinage de p de type $V \times W \subset U$ avec $V \subset \mathbb{R}^k$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in V \times W$ on a

$$f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad (x_{k+1}, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

où $q = f(p)$.
(Suggestion : Commencer par réécrire l'énoncé avec $m = 2$, $k = n = 1$ pour bien comprendre la situation).

Exercice 4.3. Montrer finalement que les trois théorèmes suivants sont équivalents

(a) Le théorème d'inversion locale

(b) Le théorème du rang constant

(c) Le théorème des fonctions implicites

Pour rappel, on a montré au cours que (a)$\Rightarrow$(b), à l'exercice 4.1 que (b)$\Rightarrow$(a) et à l'exercice 4.2 que (a)$\Rightarrow$(c), il suffit donc de montrer que (c)$\Rightarrow$(a).

Exercice 4.4. Soit M une sous-variété différentiable de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Montrer que le fibré tangent

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M \text{ et } v \in T_pM\}$$

est une sous-variété différentiable de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 4.5. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une submersion. On sait par l'exercice 3.1 que pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $M = f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^m$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m - n$. Montrer qu'en tout point $p \in M$, l'espace tangent à M en p est donné par $T_pM = \ker df_p$.

Exercice 4.6. Montrer que l'espace tangent à $O(n)$ au point I est donnée par

$$T_IO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\},$$

i.e. l'ensemble des matrices anti-symétriques.

Exercice 4.7. Soit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ de déterminant $+1$.

(a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $T_I\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.