

Exercice 5.1. Dans cet exercice, on s'intéresse aux matrices de rang exactement r .

- (a) Montrer que l'ensemble des matrices 2×2 de rang 1 est une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^4 = M_2(\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que l'ensemble des matrices $n \times m$ de rang r est une sous-variété de codimension $(n-r)(m-r)$.

Indication: Quitte à appliquer une suite de difféomorphismes dans $M_{n \times m}(\mathbb{R})$, une matrice A de rang r peut toujours s'écrire sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},$$

avec $X \in M_{r \times r}(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et $Y \in M_{r \times (m-r)}(\mathbb{R})$, $Z \in M_{(n-r) \times r}(\mathbb{R})$ et finalement $T \in M_{(n-r) \times (m-r)}(\mathbb{R})$. À partir de cette forme, montrer que $\text{rang}(A) = r$ si et seulement si $T - ZX^{-1}Y = 0$

Exercice 5.2. a) On note u, v les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ et x, y, z les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 est une immersion si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \neq \mathbf{0}$$

pour tout $(u, v) \in U$ où $\times$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que l'application $f : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(u, v) = \left(2 \cos(u) + v \cos(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right), 2 \sin u + v \cos(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right), v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

est une immersion (une application définie sur un fermé de $\mathbb{R}^m$ est une immersion si c'est la restriction d'une immersion définie sur un voisinage de ce fermé).

c) Prouver que l'image de $S = f([0, 2\pi] \times [-1, 1])$ est une variété.

d) Montrer que S est homéomorphe au ruban de Möbius.

Indication. Pour chaque $v \in [-1, 1]$ identifier la courbe $u \mapsto f(u, v)$ puis pour chaque $u \in [0, 2\pi]$ identifier la courbe $v \mapsto f(u, v)$.

Exercice 5.3. Montrer que les espaces $\overline{\mathbb{B}}^n$ et $\overline{\mathbb{I}}^n = [0, 1]^n$ sont homéomorphes.

Exercice 5.4. Soient U, V deux ouverts de

$$\overline{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

(pour la topologie relative) et $f : U \rightarrow V$ un homéomorphisme. Alors $f(U \cap \partial \mathbb{H}^n) \subset \partial \mathbb{H}^n$.

Exercice 5.5. Soient M et N deux variétés topologiques à bord de dimension m et n respectivement. Montrer que $M \times N$ est une variété topologique. Trouver sa dimension et déterminer son bord $\partial(M \times N)$ (proposer d'abord un exemple).

Exercice 5.6. Un espace non séparé localement homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Soit X la droite réelle avec l'origine dédoublée, c'est à dire $X = \mathbb{R} \amalg \{\alpha\}$. Les ouverts de X sont les réunions d'ouverts de $\mathbb{R}$ et d'ensembles de la forme $U \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}$ avec U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. Vérifier que l'on a bien défini une topologie sur X , que tout point de X est contenu dans un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$ mais que cette topologie n'est pas séparée.

Exercice 5.7. Trouver un exemple de variété topologique pour laquelle la frontière et le bord ne coïncident pas.