Exercice 4.1. Prouver le théorème d'inversion locale à partir du théorème du rang constant.

Solution 4.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse et soit $p \in U$ tel que df_p soit inversible. On veut montrer que f est localement un difféomorphisme. Or, comme df_p est inversible, on a $\text{rang}_f(p) = n$ et comme le rang est semi-continu inférieurement, il existe un voisinage ouvert $\tilde{U} \subset U$ de p tel que $\text{rang}_f(q) = n$ pour tout $q \in \tilde{U}$. Alors par le théorème du rang constant, il existe un voisinage $V \subset \tilde{U}$ de p, un voisinage $W \subset \mathbb{R}^n$ de $f(p)$ et des difféomorphismes lisses $G : V \to V'$ et $F : W \to W'$ tels que $\tilde{f} := F \circ f \circ G^{-1} : V' \to W'$ s'écrive

$$\tilde{f}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n).$$

En d'autres termes on a $\tilde{f} = id$. Ainsi, comme G et F sont des difféomorphismes lisses, on a que $f = F^{-1} \circ G : V \to W$ est un difféomorphisme lisse.

Exercice 4.2. Prouver le théorème des fonctions implicites à partir du théorème d'inversion locale. Ce théorème s'énonce ainsi :
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ où $m = n + k$. Soit p un point de U et supposons que la matrice Jacobienne partielle (de taille $n \times n$)

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1 \le i \le n,\, (k+1) \le j \le m}$$

est inversible en p. Alors il existe un voisinage de p de type $V \times W \subset U$ avec $V \subset \mathbb{R}^k$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in V \times W$ on a

$$f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad (x_{k+1}, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

où $q = f(p)$.
(Suggestion : Commencer par réécrire l'énoncé avec $m = 2$, $k = n = 1$ pour bien comprendre la situation).

Solution 4.2. Quitte à faire un changement de variable, on peut supposer que $f(p) = 0$. On commence par construire l'application suivante $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$F(x, y) = (x, f(x, y)), \quad \text{avec } x = (x^1, \dots, x^k) \quad \text{et} \quad y = (x^{k+1}, \dots, x^m).$$

La différentielle de cette application est

$$DF = \begin{pmatrix} I_k & * \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible en p puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ l'est par hypothèse. Par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $V \times W \subset U$ autour de p sur lequel F est un difféomorphisme. Puisque F agit comme l'identité sur les k premières composantes, on a

$$F^{-1}(x, z) = (x, h(x, z)) \in V \times W,$$

avec $h : V \times f(V \times W) \longrightarrow W$ lisse. Posons $\varphi : V \longrightarrow W$, $\varphi(x) := h(x, 0)$. Ainsi, si $(x, y) \in V \times W$ vérfie $f(x, y) = 0$, alors $F(x, y) = (x, 0)$ et donc

$$(x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, h(x, 0)) = (x, \varphi(x)) \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

Exercice 4.3. Montrer finalement que les trois théorèmes suivants sont équivalents

(a) Le théorème d'inversion locale

(b) Le théorème du rang constant

(c) Le théorème des fonctions implicites

Pour rappel, on a montré au cours que (a)⇒(b), à l'exercice 4.1 que (b)⇒(a) et à l'exercice 4.2 que (a)⇒(c), il suffit donc de montrer que (c)⇒(a).

Solution 4.3. Montrons le théorème d'inversion locale à partir du théorème des fonctions implicites. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $p \in U$ un point et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse telle que $f(p) = 0$ (sans perte de généralité). On veut montrer que si la matrice jacobienne de f est non nulle en p, alors il existe un voisinage ouvert de p sur lequel f est un difféomorphisme. On construit l'application suivante $F : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, y) = f(y) - x$. Alors, la matrice jacobienne de F est

$$dF = \begin{pmatrix} -I_n & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

Au point p on a $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$ qui est inversible par hypothèse, ainsi on peut appliquer le théorème des fonctions implicites, qui nous donne l'existence d'un ouvert $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ autour de $f(p)$, d'un ouvert $U_2 \subset U$ autour de p et d'une application lisse $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ telle que pour tout $(x, y) \in U_1 \times U_2$ on a

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

Or, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(y) = x$, on a donc que pour tout $(x, y) \in U_1 \times U_2$

$$f(y) = x \Longleftrightarrow y = \varphi(x),$$

i.e. l'application φ inverse localement l'application f.

Exercice 4.4. Soit M une sous-variété différentiable de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Montrer que le fibré tangent

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M \text{ et } v \in T_pM\}$$

est une sous-variété différentiable de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 4.5. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une submersion. On sait par l'exercice 3.1 que pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $M = f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^m$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$ de dimension $m - n$. Montrer qu'en tout point $p \in M$, l'espace tangent à M en p est donné par $T_pM = \ker df_p$.

Solution 4.4. Pour une courbe $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ définissant un vecteur tangent en $p \in M$, on a $f(\gamma(t)) = f(p) = q$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ et donc $df_p\dot{\gamma}(0) = 0$. On en déduit que tout vecteur tangent en p est dans le noyau de la différentielle de f en p. De plus, comme f est une submersion, on a que $\dim(\ker(df_p)) = m - \dim(\mathrm{im}(df_p)) = m - n$ et on sait que T_pM est un espace vectoriel de dimension $m - n$, d'où $T_pM = \ker(df_p)$ pour tout $p \in M$

Exercice 4.6. Montrer que l'espace tangent à $O(n)$ au point I est donnée par

$$T_IO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\},$$

i.e. l'ensemble des matrices anti-symétriques.

Solution 4.5. On se rappelle qu'on a montré que $O(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en l'exprimant comme préimage d'un point par une submersion. L'application en question est

$$\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A) = AA^T - I.$$

Par l'exercice précédent on sait que $T_I O(n) = \ker(d\Phi_I)$. Or

$$\begin{aligned} d\Phi_I(H) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(I + tH) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(tH + tH^T + t^2 HH^T\right) \\ &= H + H^T. \end{aligned}$$

Ainsi $H \in \ker(d\Phi_I) \Leftrightarrow H + H^T = 0$, d'où

$$T_I O(n) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid H^T = -H\}.$$

Exercice 4.7. Soit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ de déterminant $+1$.

(a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $T_I \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

Solution 4.6. (a) On a bien évidemment que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ et il faut donc montrer que l'application det est de rang constant sur un ouvert U de $M_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de prendre $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}((-\infty, 0)) \cup \det^{-1}((0, \infty))$ et donc est bien ouvert (par continuité du déterminant) on connait la différentielle de l'application déterminant (c.f. série 2):

$$d\det_A(H) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Cof}(A)^T H\right).$$

Ainsi pour voir que $d\det$ est surjective en tout point de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il suffit de prendre H de telle sorte que $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Cof}(A)^T H\right)$ donne exactement le déterminant d'un mineur $(n-1) \times (n-1)$ inversible de A (qui existe puisque A est supposée inversible). Par exemple, si on suppose que $\det(A(i|j)) \neq 0$, alors le terme c_{ij} de la matrice des cofacteurs est non-nul, donc le terme (j, i) de la matrice des cofacteurs transposée est non-nul est en multipliant $\mathrm{Cof}(A)^T$ par la matrice $H = E_{ij}$ qui est constituée de 0 à chaque entrée sauf un 1 à l'entrée (i, j), on obtient que la matrice $\mathrm{Cof}(A)^T H$ est constituée de colonnes de 0 sauf la j-ème qui est exactement la j-ème colonne de $\mathrm{Cof}(A)^T$. Ainsi, l'entrée (j, j) de $\mathrm{Cof}(A)^T H$ est exactement c_{ij} et le reste des termes sur la diagonale est nul, ce qui implique que

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Cof}(A)^T H\right) = c_{ij} \neq 0.$$

(b) Par l'exercice 4.5 il suffit de calculer $\ker d\det_I$:

$$H \in \ker d\det_I \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(I)^T H) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(H) = 0,$$

d'où

$$T_I \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$