Exercice 3.1. Démontrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ de rang constant $= r$, alors pour tout point $q \in \mathbb{R}^n$ l'image inverse $f^{-1}(q) \subset U$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$ (qui peut être vide). Quelle est sa dimension ?

Solution 3.1. Voir corollaire 1.3.3 du cours.

Exercice 3.2. Soient $f_1, \dots, f_k$ des fonctions C^∞ définies sur $U \subset \mathbb{R}^m$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Supposons les différentielles $df_1, \dots df_k$ sont linéairement indépendantes en tout point p de U. Montrer que

$$M = \{x \in U \mid f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$$

est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$.

Solution 3.2. On construit l'application $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ définie par

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) .$$

Sa différentielle est donnée par $dF = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_k \end{pmatrix}$. Or, comme les différentielles df_i sont supposées linéairement indépendantes en tout point de U, les lignes de la matrice jacobienne de F sont linéairement indépendantes et cette dernière est donc de rang constant égal à k. Par l'exercice précédent, sait donc que $F^{-1}(0)$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^m$ (de codimension k). Or il est clair que $F^{-1}(0) = M$.

Exercice 3.3. Démontrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ de rang constant $= r$, alors tout point $p \in U$ admet un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que l'image directe $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?
Montrer par un exemple que $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas toujours une sous-variété, même si f est injective (voir exercice 3.7 ci-dessous).

Solution 3.3. Voir corollaire 1.3.3 du cours.

Exercice 3.4. Prouver le théorème d'inversion locale à partir du théorème du rang constant.

Solution 3.4. Voir série 4.

Exercice 3.5. Prouver le théorème des fonctions implicites à partir du théorème d'inversion locale. Ce théorème s'énonce ainsi : *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ où $m = n + k$. Soit p un point de U et supposons que la matrice Jacobienne partielle (de taille $n \times n$)*

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1 \le i \le n,\, (k+1) \le j \le m}$$

soit inversible en p. Montrer qu'il existe un voisinage de p de type $V \times W \subset U$ avec $V \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in V \times W$ on a

$$f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad (x_{k+1}, \dots, x_m) = \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

où $q = f(p)$.
(Suggestion : Commencer par réécrire l'énoncé avec $m = 2$, $k = n = 1$ pour bien comprendre la situation).

Solution 3.5. Voir série 4.

Exercice 3.6. Prouver les affirmations suivantes:

(a) La sphère
$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$
est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ engendré par révolution autour de l'axe Oy du cercle de centre $(a, 0, 0)$ et de rayon r du plan Oxy est une-sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a > r$.

(c) Le cône épointé
$$C^* := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$
est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Qu'en est-il du cône avec la pointe, i.e.
$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}?$$

(d) L'ensemble des matrices orthogonales
$$O(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R} \mid A^T = A^{-1}\}$$
est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solution 3.6. On met en pratique l'exercice 3.1. L'idée est de trouver des applications appropriées qui permettent d'exprimer les ensembles comme préimages d'un point au voisinage duquel le rang des applications est constant.

(a) Trouver une équation paramétrique de la sphère et exprimer cette dernière comme préimage d'un point.

(b) Idem

(c) Idem. Le point $(0, 0, 0)$ est un point critique de l'application $x^2 + y^2 - z^2$, il faut donc l'enlever pour que la préimage de 0 soit une sous-variété différentiable.

(d) Considérons l'application $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ définie par $\varphi(A) = A \cdot A^T - I_n$. La différentielle de φ est donnée par
$$\begin{aligned}
d\varphi_A(B) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(A + tB) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big((A + tB)(A + tB)^T - I_n\big) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big(AA^T + tAB^T + tBA^T + t^2BB^T - I_n\big) \\
&= AB^T + BA^T \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

On affirme que $d\varphi_A$ est surjective, ce qui montrerait que φ est de rang maximal (et donc constant) sur $\mathrm{O}(n)$. Pour $C \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, on a que
$$d\varphi_A\left(\frac{1}{2}AC\right) = \frac{1}{2}C^TA^TA + \frac{1}{2}A^TAC = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C,$$
d'où la surjectivité. Comme φ est une submersion, il suit que $\mathrm{O}(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de dimension
$$\dim(\mathrm{O}(n)) = \dim(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 3.7. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$t \mapsto \left(\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t}, \frac{2 \sin t}{1 + \cos^2 t} \right)$$

est une immersion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ périodique de période 2π (on rappelle que $f : U \to \mathbb{R}^n$ une immersion si df_p est injective en tout point $p \in U$).
Montrer ensuite que $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ mais que par contre, l'image de tout intervalle de longueur inférieure à π en est une.