Table des matières

Chapitre 1

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1.1 Rappels d'analyse et de calcul différentiel

1.1.1 Préliminaires

On considère deux "objets" définis dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple des sous-ensembles, des applications, des champs de vecteurs ou de tenseurs) et on se pose deux questions :

a.) Que signifie pour ces deux objets d'être *différentiablement équivalents* ?

b.) Que signifie pour ces deux objets d'être *tangent* en un point donné ?

Pour répondre à ces questions, on rappelle quelques définitions.

Soit U un domaine de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application. Pour un point p de U et un indice $i = 1, 2, \dots, m$, on note

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

si cette limite existe, où $e_1, e_2, \dots, e_m$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $x^1, x^2, \dots, x^m$ sont les coordonnées associées [1] (i.e. $x = \sum_{i=1}^m x^i e_i$).
La limite (1.1) s'appelle la *dérivée partielle de f au point p en direction de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée* (ou en direction du vecteur e_i).

On dit que l'application $f : U \to \mathbb{R}^n$ est *de classe* C^1 si elle est continue et si toutes les dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} : U \to \mathbb{R}^n$$

existent en tout point de U et sont continues. La fonction est de classe C^k (k un entier ≥ 2) si les $n+1$ fonctions $f, \dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \dots \dfrac{\partial f}{\partial x^n} : U \to \mathbb{R}^n$ sont de classe C^{k-1}.

On note $C^0(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications continues sur U et $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de classe C^k. Une application est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k et on note $C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \cap_{k \geq 0} C^k(U, \mathbb{R}^n)$. On dit parfois que f est *lisse* si $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Lorsque $n = 1$, i.e. lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on note simplement $C^k(U) = C^k(U, \mathbb{R}^n)$, on appelle les éléments de $C^k(U)$ des *fonctions* (ainsi les fonctions sont les applications à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1. observer qu'on note les numéro des coordonnées en exposant (il ne s'agit pas de puissances). Cette convention est fréquente en géométrie différentielle et rend la lecture de certaines formules plus aisées.

La matrice à n lignes et m colonnes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

s'appelle la *matrice Jacobienne* de f. Noter que c'est une fonction du point $p \in U$. Lorsque $n = m$, le déterminant de cette matrice est alors bien défini, on l'appelle le *Jacobien* de f et on note [2]

$$J_f(p) = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$$

Définitions. 1. Un *difféomorphisme* de classe C^k entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ est une application bijective $f : U \to V$ telle que f et f^{-1} sont de classe C^k (lorsque $k = 0$, f est simplement un homéomorphisme).
2. Une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ est *difféomorphisme local* de classe C^k en p si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ et s'il existe un voisinage ouvert $U' \subset U$ de p tel que $V' = f(U')$ est ouvert et la restriction $f|_{U'}$ est un C^k-difféomorphisme de U' sur V'.
Finalement on dit que $f : U \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local si c'est un difféomorphisme local en chaque point de U.

Observer qu'un difféomorphisme local n'est pas forcément une application injective (ni surjective d'ailleurs). Toutefois un difféomorphisme local est localement injectif.

Théorème 1.1.1 (Théorème d'inversion locale) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ (avec $k \geq 1$). Alors f est un C^k-difféomorphisme local au voisinage de $p \in U$ si et seulement si $J_f(p) \neq 0$.*

Corollaire 1.1.2 *Une application $f : U \to V$ de classe C^k entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme si et seulement f est bijective et $J_f(p) \neq 0$ pour tout $p \in U$.*

Remarque : Un homéomorphisme de classe C^k n'est pas toujours un difféomorphisme. Par exemple la fonction $f(x) = x^3$ décrit un homéomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ mais l'inverse $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en $y = 0$.

Il y a deux façon de concevoir un difféomorphisme $f : U \to V$. Dans le premier point de vue, on considère que f déplace les points de U (éventuellement en déformant l'ensemble U). Ainsi si p est un point de U, alors $q = f(p)$ est un autre point qui appartient à V.
Dans le second point de vue, les points ne bougent pas, mais $(y^1, y^2, \ldots, y^n) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ représente un nouveau système de coordonnées sur U.

Définition. Un *système de coordonnées de classe C^k sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$* est la donnée de n fonctions $y^1, y^2, \ldots, y^n : U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\phi : (x^1, x^2, \ldots, x^n) \mapsto (y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

décrit un difféomorphisme de U vers un ouvert $V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. On dit alors parfois que ϕ est une *carte* pour U.

2. Une autre notation, un peu désuète, est

$$\frac{\partial(f^1, \ldots, f^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right).$$

Définitions 1. Soient $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^m$ et $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $f_2 \in C^k(U-1, V_1)$, $f_2 \in C^k(U_2, V_2)$ des applications. Alors f_1 et f_2 sont dites C^k-*équivalentes* s'il existe des difféomorphismes $\phi : U_1 \to U_2$ et $\psi : V_1 \to V_2$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f_1} & V_1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U_2 & \xrightarrow{f_2} & V_2 \end{array} \qquad \text{i.e.} \quad f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1$$

2. Deux sous-ensembles X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^m$ sont C^k-*équivalents* s'il existe des voisinages U_1 de X_1 et U_2 de X_2 ainsi qu'un difféomorphisme $\phi : U_1 \to U_2$ tel que $\phi(X) = Y$.

Exemple. Le demi-cercle $S^1_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0\}$ est C^∞-équivalent à un intervalle ouvert dans le plan. En effet les coordonnées polaires (r, θ) définie par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^1+y^2}}\right)$ forment un difféomorphisme de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ sur $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, 0 < \theta < \pi\}$ qui envoie S^1_+ sur $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r = 1, 0 < \theta < \pi\}$.

Définition. Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de de dimension m de classe C^k* si M est localement C^k-équivalent à un sous-espace vectoriel de dimension m de $\mathbb{R}^n$.
Cette condition signifie que pour tout $p \in M$ il existe un voisinage U de p et un C^k-difféomorphisme $\phi : U \to V$ tel que

$$\phi(U \cap M) = V \cap E$$

où $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension m.

Remarque. On peut remplacer dans la définition suivante les mots *sous-espace vectoriel* par *sous-espace affine*. Dans la pratique, vérifier que M est une sous-variété de dimension m revient à montrer qu'au voisinage de tout point de M il existe un système de cordonnées $y^1, \ldots, y^n$ dans un voisinage U de p tel que

$$\phi(U \cap M) = V \cap \{y \in V \mid y^{m+1} = c_1, \ldots y^n = c_n\},$$

où $c_{m+1}, \ldots c_n$ sont des constantes. La sous variété est donc localement décrite par un système de $n - m$ équations (en général non linéaires).

Remarques.

i.) Une sous-variété de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble discret (tous ses points sont isolés).

ii.) Une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

iii.) L'ensemble vide est une sous-variété de dimension m pour tout m.

Digression : Rappels sur la notion de norme Soit E un espace vectoriel sur le corps de réels. Rappelons qu'un *norme* sur E est une fonction $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

i.) $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

ii.) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii.) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A toute norme sur E on défini une distance d sur E définie par $d(x,y) = \|y-x\|$, en particulier une norme définit une topologie sur E et on peut alors parler d'ouverts, de fermés, d'ensembles compacts, de convergence, de continuité etc.
Deux normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sur E sont dites *équivalentes* (ou *topologiquement équivalentes*) si elles définissent la même topologie.

Exercices a) Les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sur l'espace vectoriel E sont dites équivalentes si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$ on a

$$\frac{1}{c}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_2.$$

b) Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finies sont toujours équivalentes.

Exemples de normes.

1.) Si $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire, alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme (lorsque c'est le cas, on dit que la norme $\| \|$ dérive d'un produit scalaire).

2.) Pour $1 \leq p < \infty$, on définit la norme $\| \|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

3.) Toujours sur $\mathbb{R}^n$, on définit la norme $\| \|_\infty$ par

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|.$$

4.) Sur $C^0([0,1])$ on définit aussi des normes $\| \|_p$:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

5.) Si $(V_1, \| \|_1)$ et $(V_2, \| \|_2)$ sont deux espaces normés de dimensions finies, on définit la *norme d'opérateurs* sur $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ par

$$\|\Phi\|_{\mathrm{Op}} = \sup\{\|\Phi(x)\|_2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}.$$

6.) La *norme de Hilbert-Schmidt* sur l'espace $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels est définie par

$$\|A\|_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Trace}(A^\top A) = \sum_{i,j} \sqrt{A_{ij}^2}.$$

Proposition 1.1.3 *Toute application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie est continue.*

1.1.2 Applications Différentiables

Définition. On dit que deux applications $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}^n$ définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ sont *tangentes* en un point $p \in U$ si

$$f_1(x) - f_2(x) = o(\|x-p\|),$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to p} \frac{\|f_1(x) - f_2(x)\|}{\|x-p\|} = 0$$

(en particulier on a $f_1(p) = f_2(p)$).

Les propriétés suivantes sont faciles à démontrer :

1. La relation "être tangent en p" est une relation d'équivalence : si f_1 est tangent à f_2 en p et f_2 est tangent à f_3 en p alors f_1 est tangent à f_3 en p.
2. Si f_1 est tangent à f_2 en p et si g_1 est tangent à g_2 en p, alors si $(\lambda f_1 + \mu g_1)$ est tangent à $(\lambda f_2 + \mu g_2)$ en p.
3. La notion de tangence ne dépend pas du choix de la norme (en dimension infinie cette notion dépend uniquement de la classe d'équivalence de la norme).

Une application f est différentiable (au sens de Frechet) en p si $f(x) - f(p)$ est tangente à une application linéaire :

Définition. L'application $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est différentiable au sens de Frechet en $p \in U$ s'il existe une application linéaire $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x) - f(p) - \ell(x-p) = o(\|x-p\|)$$

(en particulier $f_1(p) = f_2(p)$). On peut réécrire cette condition sous la forme

$$\lim_{x \to p} \frac{\|f(x) - f(p) - \ell(x-p)\|}{\|x-p\|} = 0.$$

Lemme 1.1.4 *Si elle existe, l'application linéaire de la définition précédente est unique.*

On l'appelle alors cette application la *différentielle* de f en p et on note

$$Df_p = df_p := \ell(x-p).$$

Remarque. Il est fréquent de noter h le vecteur $h = x - p$. On pense alors à h comme un accroissement de p. On a alors

$$f(p+h) = f(p) + df_p(h) + o(\|h\|).$$

On remarque aussi que $df_p(h)$ peut se calculer par la formule suivante :

$$df_p(h) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(p+th) - f(p)}{t} \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p+th),$$

Il s'agit donc de la dérivée directionnelle de f au point p en direction de h.

Exemple. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, alors $f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable en $p \in I$ si et seulement si f est dérivable et

$$df_p(h) = f'(p) \cdot h.$$

Proposition 1.1.5 (Différentiation en chaîne) *Soient $U \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{R}^n$ deux ouverts et $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^s$ deux applications telles que f est Fréchet différentiable en $p \in U$ et g est Fréchet différentiable en $q = f(p) \in V$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^s$ est Fréchet différentiable en p et*

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$$

La preuve a été vue aux exercices. Noter que cette proposition est l'une des raisons qui rend la notion de différentiabilité au sens de Fréchet importante.

Corollaire 1.1.6 *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable en chaque point de U ou U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$. Supposons que la différentielle de f soit bornée sur U, i.e. il existe $C > 0$ tel que $\|df_p\| \leq C$ pour tout $p \in U$. Alors f est C-Lipschitzienne, i.e.*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|.$$

Théorème 1.1.7 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, alors f est différentiable en tout point p de U, de plus la matrice de la différentielle df_p est la matrice Jacobienne de f en p :*

$$df_p = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$$

Démonstration. On fait la preuve pour $m = 2$, le cas général est semblable. Ecrivons

$$f(p_1+h_1, p_2+h_2) - f(p_1, p_2) = f(p_1+h_1, p_2+h_2) - f(p_1+h_1, p_2) + f(p_1+h_1, p_2) - f(p_1, p_2).$$

On a d'une part

$$f(p_1 + h_1, p_2) - f(p_1, p_2) = \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_1} \cdot h_1 + o(h_1).$$

D'autre part, appliquons le théorème des accroissements fini à la fonction
$\phi(t) = f(p_1 + h_1, p_2 + th_2)$. Ce théorème nous dit qu'il existe $s \in [0, 1]$ tel que

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(s) = h_2 \cdot \frac{\partial f(p_1 + h_1, p_2 + sh_2)}{\partial x_2},$$

c'est-à-dire

$$f(p_1 + h_1, p_2) - f(p_1, p_2) = h_2 \cdot \frac{\partial f(p_1 + h_1, sp_2 + sh_2)}{\partial x_2}.$$

Par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, on a

$$\frac{\partial f(p_1 + h_1, sp_2 + sh_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_2} + o(h_1, h_2)$$

En regroupant toute ces identités, on obtient

$$f(p_1 + h_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2) = \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_2} \cdot h_2 + o(h_1, h_2).$$

On a donc montré que f est différentiable en p et que

$$df_p(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot h_2.$$

Cette dernière relation signifie que la matrice de df est la matrice Jacobienne de f. □

Corollaire 1.1.8 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, l'application $p \to df_p$ est continue.*

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application affine, i.e. une application du type $f(x) = Ax + b$ (avec A une $n \times m$ matrice). Alors f est différentiable en tout point et $df_p = A$ pour tout $p \in \mathbb{R}^m$.
2. Si $\beta : E_1 \times E_2 \to E_3$ est une application bilinéaire (où E_i sont des espaces normés de dimension finies), alors
$$d\beta_{(p_1,p_2)}(h_1, h_2) = \beta(p_1, h_2) + \beta(h_1, p_2)$$
3. Considérons l'application $\psi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\psi(A) = A^2$, alors
$$d\psi_A(H) = AH + HA.$$
4. L'application $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par $\psi(A) = A^{-1}$, alors
$$d\phi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$
5. La différentielle de l'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est donnée par
$$d\det_A(H) = \mathrm{Trace}(\mathrm{Cof}(A)^\top H).$$
où $\mathrm{Cof}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.

1.2 Preuve du théorème d'inversion locale

Dans ce paragraphe nous donnons la preuve du théorème d'inversion locale. Rappelons l'énoncé :

Théorème 1.2.1 (Théorème d'inversion locale) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ (avec $k \geq 1$). Alors f est un C^k-difféomorphisme local au voisinage de $p \in U$ si et seulement si la différentielle df_p est inversible. De plus $df^{-1}_{f(p)} = df_p^{-1}$.*

Preuve. Quitte à remplacer f par l'application $x \mapsto f(x - p) - f(p)$, on se ramène au cas $p = f(p) = 0$. En composant ensuite f avec l'application linéaire df_0^{-1}, on peut supposer que $df_0 = Id$. Avec ces hypothèses, on a donc
$$f(x) = x + g(x),$$
où $g \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ vérifie $g(0) = 0$ et $dg_0 = 0$, c'est-à-dire $g(x) = o(\|x\|)$.
Nous devons construire un voisinage de 0 sur lequel f est inversible. Comme $x \mapsto dg_x$ est continu et $dg_0 = 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout x dans la boule B_r de centre 0 et de rayon r on a $\|dg\|_x \leq \frac{1}{3}$ (on prend r assez petit pour que $B_r \subset U$). En particulier g est $\frac{1}{3}$-Lipschitz sur cette boule, c'et-à-dire
$$x, x' \in B_r \quad \Rightarrow \quad \|g(x') - g(x)\| \leq \frac{1}{3}\|x' - x\|,$$
en particulier $\|g(x)\| \leq \frac{r}{3}$ pour tout $x \in B_r$. On va montrer que tout point $y \in B_{r/2}$ appartient à l'image de f par la méthode du point fixe. Observons que
$$f(x) = x + g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y - g(x).$$
Fixons donc $y_0 \in B_{r/2}$ et définissons $T : B_r \to \mathbb{R}^n$ par
$$T(x) = y_0 - g(x).$$

Observons d'abord que $T(B_r) \subset B_r$ car

$$\|x\| \leq r \Rightarrow \|T(x)\| = \|y_0 - g(x)\| \leq \|y_0\| + \|g(x)\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{3} < r.$$

Ainsi T définit une transformation $T : B_r \to B_r$ montrons qu'elle est strictement contractante :

$$x, x' \in B_r \Rightarrow \|T(x') - T(x)\| = \|g(x') - g(x)\| \leq \frac{1}{3}\|x' - x\|.$$

L'application T possède donc un unique point fixe x_0 tel que $T(x_0) = x_0$, c'est-à-dire $f(x_0) = y_0$. On a montré que $B_{r/2}$ est contenu dans l'image de f.
Considérons l'ouvert $V = B_r \cap f^{-1}(B_{r/2})$, alors par construction $f : V \to B_{r/2}$ est surjective. Cette application est aussi injective par unicité du point fixe de T.

Notons $h : B_{r/2} \to V$ l'inverse de $f|_V$ et montrons d'abord que h est continue en 0. Observons que pour $x \in V$ on a $f(x) = x + g(x)$, donc

$$\|x\| = \|f(x) - g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f(x)\| + \frac{1}{3}\|x\|$$

qui implique en posant $x = h(y)$

$$\|h(y)\| = \|x\| \leq \frac{3}{2}\|f(x)\| = \frac{3}{2}\|y\|.$$

Nous pouvons montrer maintenant que h est différentiable en 0 et que sa différentielle en 0 est l'identité :

$$\frac{\|h(y) - y\|}{\|y\|} = \frac{\|x - f(x)\|}{\|y\|} = \frac{\|g(x)\|}{\|y\|} \leq \frac{3}{2}\frac{\|g(x)\|}{\|x\|}$$

qui tend vers 0 lorsque $x \to 0$ (et cette condition est équivalente à $y \to 0$).

Nous avons démontré que si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est C^k et si df_p est inversible en un point $p \in U$, alors f définit une bijection dans un voisinage de p et l'inverse f^{-1} est différentiable en $f(p)$. Il est clair que si df_p est inversible $p \in U$, alors df est inversible en tout point d'un voisinage de p (car le jacobien est une fonction continue). L'inverse f^{-1} est alors de classe C^k car la différentielle de f^{-1} admet pour matrice jacobienne l'inverse de la matrice jacobienne de df.

$\square$

Une conséquence importante du théorème d'inversion locale est le

Théorème 1.2.2 (théorème des fonctions implicites) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ où $m = n + k$. Soit p un point de U et supposons que la matrice Jacobienne partielle (de taille $n \times n$)*

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i \leq n,\, (k+1) \leq j \leq m}$$

est inversible en p. Alors il existe un voisinage de p de type $V \times W \subset U$ avec $V \subset \mathbb{R}^k$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application $\phi : V \to W$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in V \times W$ on a

$$f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad (x_{k+1}, \ldots, x_m) = \phi(x_1, \ldots, x_k)$$

où $q = f(p)$.

1.3 Le théorème du rang constant

Rappels d'algèbre linéaire. Rappelons que le *rang* d'une application linéaire $\ell : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est la dimension de l'image $\mathrm{Im}(\ell) \subset \mathbb{R}^n$. L'application linéaire ℓ est de rang r si et seulement si après changement de bases sur $\mathbb{R}^m$ et sur $\mathbb{R}^n$ sa matrice prend la forme

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dans ces coordonnées, l'application s'écrit $(x^1, \dots x^r, 0, \dots 0)$.
On montre aussi que le rang est la valeur maximale de $r \in \mathbb{N}$ tel que la matrice A admet un $r \times r$ mineur non nul (i.e. une sous-matrice carrée de taille $r \times r$ et de déterminant non nul).

Définitions.

- Le *rang* d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est la fonction $\mathrm{rang}_f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{rang}_f(p) = \mathrm{rang}(df_p)$.
- On dit que f est de *rang maximal* en p si $\mathrm{rang}_f(p) = \min(m, n)$.
- f est une *immersion* si $\mathrm{rang}_f(p) = m$ pour tout $p \in U$ (de façon équivalente df_p est injective pour tout $p \in U$).
- f est une *submersion* si $\mathrm{rang}_f(p) = n$ pour tout $p \in U$ (de façon équivalente df_p est surjective pour tout $p \in U$).

Lemme 1.3.1 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, alors la fonction $U \to \mathbb{N}$ définie par $p \mapsto \mathrm{rang}_f(p)$ est semi-continue inférieurement. En particulier si f est de rang maximal en un point p, alors f est de rang maximal dans un voisinage de ce point.*

Rappelons qu'une fonction $\rho : U \to \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement* si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in U \mid \rho(x) > \alpha\}$ est ouvert.

Preuve du lemme. L'application f vérifie $\mathrm{rang}_f(p) \geq r$ si et seulement si la matrice jacobienne de df_p admet un $r \times r$ mineur non nul (i.e. si cette matrice contient une sous-matrice carrée de taille $r \times r$ dont le déterminant est non nul). Par continuité de la matrice jacobienne, ce même mineur est non nul dans un voisinage de p. $\square$

Le théorème du rang constant affirme qu'une application de classe C^k dont le rang est constant est localement C^k-équivalente à une application linéaire :

Théorème 1.3.2 (Théorème du rang constant) *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et de rang constant $= r$. Alors pour tout $p \in U$ il existe des voisinages V de p et W de $q = f(p)$ ainsi que des C^k-difféomorphismes*

$$F : W \to W' \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad G : V \to V' \subset \mathbb{R}^m$$

tels que

i.) $f(V) \subset W$,

ii.) $G(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ *et* $F(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$,

iii.) l'application $\widetilde{f} = F \circ f \circ G^{-1} : V' \to W'$ *s'écrit*

$$\widetilde{f}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots x^r, 0, \dots 0).$$

Preuve. On peut supposer quitte à faire des translations que $p = 0 \in \mathbb{R}^m$ et $q = f(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Quitte à faire des changements de bases sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, on peut aussi supposer que df_0 prenne la forme normale. De façon équivalente la matrice jacobienne de f en 0 est la $n \times m$ matrice

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On définit l'application suivante $G : U \to \mathbb{R}^m$

$$G(x^1, \ldots, x^m) = (f^1(x), \ldots, f^r(x), x^{r+1}, \ldots x^m),$$

et on observe que la matrice jacobienne de f en 0 est la $m \times m$ matrice

$$\left(\frac{\partial G^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{m-r} \end{pmatrix}.$$

Par le théorème d'inversion locale, G définit un difféomorphisme de classe C^k d'un voisinage V de 0 sur un autre voisinage V' de 0.
On considère maintenant l'application $f \circ G^{-1} : V' \to \mathbb{R}^n$, cette application s'écrit

$$f \circ G^{-1}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^r, f^{r+1} \circ G^{-1}(x), \ldots f^n \circ G^{-1}(x))$$

et son jacobien en x est une $m \times n$ matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & * \\ 0 & \Delta(x) \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \Delta(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} f^i \circ G^{-1}\right)_{(r+1) \leq i,j \leq n}$$

Or nous savons que cette matrice est de rang r pour tout $x \in V'$ car rang $f \circ G^{-1} =$ rang $f = r$. Par conséquent $\Delta(x)$ est la matrice nulle pour tout $x \in V'$. Par conséquent $f \circ G^{-1}$ ne dépend que des variables $x^1, \ldots, x^r$. On peut donc écrire

$$f \circ G^{-1}(x) = (x^1, \ldots, x^r, h(x^1, \ldots, x^r))$$

On définit maintenant une application $F : f(U) \to \mathbb{R}^n$ par

$$F(y) = (y^1, \ldots, y^r, y^{r+1} - h^{r+1}(y^1, \ldots, y^r), y^n - h^n(y^1, \ldots, y^r)).$$

La matrice jacobienne de F en 0 est la $n \times n$ matrice

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ * & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible, donc F définit un C^k-difféomorphisme d'un voisinage W de $0 \in \mathbb{R}^n$ vers un voisinage W' de 0. On vérifie que $F \circ f \circ G^{-1} : V' \to W'$ est donné par

$$F \circ f \circ G^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots x^r, 0, \ldots 0).$$

□

Corollaire 1.3.3 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et de rang constant $= r$, alors on a les conclusions suivantes :*

A) Pour chaque point $q \in \mathbb{R}^n$, la préimage $M = f^{-1}(q) \subset U$ est une sous-variété différentiable de codimension r (i.e. de dimension $m - r$).

B) *Chaque point $p \in U$ admet un voisinage $V_p \subset U$ tel que l'image directe $N = f(V_p) \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension r.*

En particulier :

- Si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une submersion de classe C^k, alors $M = f^{-1}(q)$ est une sous-variété de codimension n.
- Si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une immersion de classe C^k, alors chaque point $p \in U$ admet un voisinage $V_p \subset U$ tel que l'image directe $N = f(V_p) \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n.

On peut facilement construire des exemples montrant que en général l'image $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ d'une immersion f n'est pas une sous-variété. Le corollaire nous dit que l'image de f est localement une variété, mais ça n'est pas toujours le cas globalement.

Preuve du corollaire Le principe de la démonstration est d'appliquer le théorème du rang constant. Ce théorème nous dit dit que l'application f est localement équivalenté à une application linéaire de rang r donc la préimage d'un point par f et son image directe sont localements équivalentss à des sous-espaces vectoriels, or c'est précisément cela la définition d'une sous-variété.

Commençons par démontrer l'affirmation (A). Fixons $q \in \mathbb{R}^n$, si $q \notin f(U)$, alors $f^{-1}(q) = \emptyset$ et il n'y a rien à montrer. On suppose donc qu'il existe $q \in f(U)$ et on choisit un point $p \in M = f^{-1}(q)$. Par le théorème du rang constant on sait qu'il existe des ouverts $V, V' \subset \mathbb{R}^m$ et $W, W' \subset \mathbb{R}^n$ avec $p \in V$, $q \in W$ ainsi que des difféomorphismes $F : W \to W'$ et $G : V \to V'$ tels que $G(p) = 0$, $F(q) = 0$ et $\widetilde{f} = F \circ f \circ G^{-1} : V' \to W'$ s'écrit $\widetilde{f}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots x^r, 0, \dots 0)$. On a alors

$$G(M \cap V) = V' \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^1 = x^2 = x^r = 0\} \subset \mathbb{R}^m.$$

On a démontré que tout point $M = f^{-1}(q)$ est différentiablement équivalent à un ouvert d'un sous-espace vectoriel de dimension $m - r$ au voisinage de chacun de ses points. Par définition M est donc une sous-variété de dimension $m - r$ de $\mathbb{R}^m$.

Montrons maintenant l'affirmation (B). Fixons un point quelconque $p \in U$ et considérons des voisinages V de p et W de $q = f(p)$ ainsi que des difféomorphismes $F : W \to W'$ et $G : V \to V'$ comme plus haut. Notons $N = f(V)$, alors

$$F(N \cap W) = W' \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^{r+1} = \cdots = x^{n-1} = x^n = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

Donc N est une sous-variété de dimension $n - (n - r) = r$ de $\mathbb{R}^n$.

□

1.4 L'espace tangent à une sous-variété

Un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est tangent en un point p à une sous-variété $m \in \mathbb{R}^n$ si c'est le vecteur vitesse d'une courbe différentiable contenue dans la variété et passant par p. Plus précisément ;

Définition. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe C^1 de dimension m et soit p un point de M. Un *vecteur tangent* à M en p est un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une courbe $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ de clase C^1 telle que

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}.$$

On note T_pM l'ensemble des vecteurs tangents à M en p.

Proposition 1.4.1 *L'espace tangent $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension m.*

Preuve. On sait par définition de la notion de variété qu'il existe un voisinage U de p et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tel que $\phi(p) = 0$ et

$$\phi(U \cap M) = V \cap E$$

où $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace-vectoriel de dimension n.
Soit $\mathbf{v} \in T_pM$, par définition il existe une courbe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \cap U$ de classe C^1 telle que $\alpha(0) = p$ et $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0)$. Définissons la courbe $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to V \cap E$ par $\beta(t) = \phi \circ \alpha(t)$, alors on a

$$\mathbf{v} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^{-1}(\beta(t)) = d\phi_0^{-1}(\dot{\beta}(0)) \in d\phi_0^{-1}(E).$$

On a montré que T_PM est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $d\phi_0^{-1}(E)$. Pour montrer l'inclusion inverse, on considère un vecteur quelconque $\mathbf{w} \in E$, alors pour $\epsilon > 0$ assez petit, la courbe : $\beta(-\epsilon, \epsilon) \to E$ définie par $\beta(t) = t\mathbf{w}$ prend ses valeurs dans $V \cap E$. Notons $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta$, alors $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \cap U$ est une courbe C^1 telle que $\alpha(0) = p$, par conséquent $\dot{\alpha}(0) \in T_pM$. Mais on a

$$d\phi_0^{-1}(\mathbf{w}) = d\phi_0^{-1}(\dot{\beta}(0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^{-1}\beta(t) = \dot{\alpha}(0) \in T_pM.$$

Ceci montre que $d\phi_0^{-1}(E) \subset T_pM$. □

Exemple. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors T_pU est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$, car tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur vitesse de la courbe $\gamma_{\mathbf{v}}(t) = p + t\mathbf{v}$ (cette courbe est définie dans U pour $|t| < \varepsilon$ assez petit).

Proposition 1.4.2 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ est une submersion, alors pour tout point p de la sous-variété $M = f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^n$ on a $T_pM = \ker df_p$.*

Proposition 1.4.3 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une immersion injective telle que $M = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, alors pour tout $q = f(p) \in M$, on a $T_qM = \mathrm{Im}(df_p)$.*

Remarque. L'espace tangent T_pM d'une sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Ce sous-espace n'est pas g*éométriquement* tangent à la sous-variété M (il peut même être disjoint de M). Pour cette raison on introduit aussi l'*espace affine tangent* à p en M. C'est le sous-espace affine

$$A_pM = \{q \in \mathbb{R}^n \mid (q - p) \in T_pM\} = p + T_pM.$$

Le point p appartient à l'intersection $M \cap A_pM$ et le sous-espace affine est géométriquement tangent à M en ce point.

Exemple. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $df_p \neq 0$ en tout $p \in U$, alors l'espace affine tangent à l'hypersurface $M = f^{-1}(0)$ en p est l'hyperplan d'équation

$$A_pM : \ \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) = 0$$

A titre d'exemple, le plan tangent en $p = (x_0, y_0, z_0)$ à l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ est le plan d'équation
$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0.$$

Définition. On appelle *espace tangent total* ou *fibré tangent* à la sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble définit par
$$TM = \{(p, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M \text{ et } \mathbf{v} \in T_pM\}.$$

Proposition 1.4.4 *Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension m et de classe C^k avec $k \geq 2$, alors $TM \subset \mathbb{R}^{2n}$ est une sous-variété de dimension $2m$ et de classe C^{k-1}.*

La preuve a été vue aux exercices.

Chapitre 2

Les variétés topologiques

2.1 Rappels de topologie

La topologie étudie et formalise les notions de *voisinage*, de *convergence* et de *continuité*.

Définition 2.1.1 Soit X un ensemble. On appelle *topologie* sur X une famille de sous-ensembles $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

i.) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

ii.) si $U, V \in \mathcal{O}$, alors $U \cap V \in \mathcal{O}$;

iii.) si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{O}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

On dit que $U \subset X$ est *ouvert* si $U \in \mathcal{O}$ et on dit que $F \subset X$ est *fermé* si $F^c = X \setminus F \in \mathcal{O}$. L'ensemble $A \subset X$ est un *voisinage* du point $p \in X$ s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{O}$ tel que $p \in U \subset A$. Un *espace topologique* est un couple $(X, \mathcal{O})$ où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ est une topologie sur X.

Il est clair que l'intersection d'une famille quelconque de fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est un fermé. Pour tout $A \in \mathcal{O}$, on note $\overline{A}$ l'intersection de tous les fermés qui contiennent A :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A,\ F \text{ fermé}} F.$$

L'ensemble $\overline{A}$ est donc le plus petit ensemble fermé qui contient A. On l'appelle l'*adhérence* ou la *fermeture* de A. On le note aussi $\mathrm{Cl}(A)$ ("Cl" pour *closure* = fermeture en anglais).

On définit aussi l'*intérieur* de A. C'est le plus grand ouvert qui est contenu dans A, on le note A^o ou $\mathrm{Int}(A)$, il est définit par

$$\mathrm{Int}(A) = A^o = \bigcup_{U \subset A,\ U \text{ ouvert}} U.$$

Il est clair que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Cl}(A)$, la différence s'appelle la *frontière* de A et se note

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Une application $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre deux espaces topologiques est *continue* si l'image inverse d'un ouvert de Y est un ouvert de X, i.e. $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{O}_X$. L'application est *ouverte* si l'image directe d'un ouvert de X est un ouvert de Y, i.e. $f(\mathcal{O}_X) \subset \mathcal{O}_Y$.

L'application f est un *homéomorphisme* si elle est bijective, continue et ouverte (et donc $f^{-1} : Y \to X$ est aussi continue).

L'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *séparé* (on dit aussi qu'il est *de Hausdorff*) si toute paire de points distincts admet des voisinages disjoints, i.e. si pour tous $p, q \in X$, $p \neq q$, il existe $U, V \in \mathcal{O}$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et $p \in U$, $q \in V$. L'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *connexe* si tout sous-ensemble qui est à la fois ouvert et fermé est égal à X ou $\emptyset$. La réunion de tous les sous ensembles connexes contenant un point $x \in X$ s'appelle la *composante connexe* de x. L'ensemble X est réunion disjointe des ses composantes connexes, et chaque composante connexe est un sous-ensemble connexe et maximal (i.e. qui n'est contenu dans aucun sous-ensemble connexe plus grand). L'espace X est *localement connexe* si tout point admet un voisinage connexe. Lorsque X est localement connexe, les composantes connexes de X sont les sous-ensembles qui sont ouverts, fermés et connexes.

L'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ *admet une base dénombrable d'ouverts* (on dit aussi qu'il vérifie le *second axiome de dénombrabilit*é) s'il existe une suite dénombrable d'ouverts $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que tout ouvert est réunion d'éléments de cette suite.

Exemples d'espaces topologiques.

1.) Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une topologie séparée appelée la *topologie discrète.*

2.) $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie appelée la *topologie grossière.* Elle est non séparée dès que X contient au moins deux points.

3.) La collection des sous-ensembles de X qui sont vide ou de complémentaire fini est une topologie sur X (en général non séparée). On l'appelle la *topologie cofinie.*

4.) Si (X, d) est un espace métrique, alors il existe une topologie séparée dont les ouverts sont les parties $U \subset X$ qui sont réunion de boules ouvertes, i.e. d'ensembles du type

$$B(p, \varepsilon) = \{q \in X \,\big|\, d(p, q) < \varepsilon\}.$$

Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit *métrisable* s'il existe une distance d sur X induisant la topologie $\mathcal{O}$.

5.) Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique et $Y \subset X$, alors

$$\mathcal{O}_Y := \{V = U \cap Y \,\big|\, U \in \mathcal{O}_x\}$$

est une topologie sur Y. On l'appelle la *topologie relative* ou la *topologie induite* sur Y par $\mathcal{O}_X$.

2.2 Le théorème d'invariance du domaine

Un théorème fondamental sur la topologie de $\mathbb{R}^n$ est le suivant :

Théorème 2.2.1 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer (1912)) *Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une application continue et injective, alors f est une application ouverte (et c'est donc un homéomorphisme sur son image).*

Nous admettons ce théorème sans démonstration.

Corollaire 2.2.2 (Invariance de la dimension) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ non vide, et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Si U et V sont homéomorphes, alors $m = n$.*

Rappelons que Cantor avait démontré qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ pour toute paire d'entiers $n, m \geq 1$.

Preuve. Supposons que $n > m$ et que $g : U \to V$ est un homéomorphisme. Considérons l'application $f : U \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x), \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}).$$

Alors f est continue et injective, donc $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert par le théorème précédent. Mais c'est impossible car $f(U) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_n = 0\}$ qui ne contient aucun sous-ensemble ouvert non vide. Donc il est impossible que $n > m$. De même $m \not> n$.

□

2.3 La notion de variété topologique

Définition 2.3.1 Une *variété topologique de dimension* n (où n est un entier naturel) est un espace topologique M tel que

1.) M est séparé,

2.) M a une base dénombrable d'ouverts,

3.) M est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

La dernière condition signifie que pour tout point $p \in M$ il existe un ouvert $U \subset M$ contenant p, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\phi : U \to V$.

Un peu de terminologie :
On dit que $\phi : U \to V$ est une *carte locale* au voisinage de p et que l'inverse $\phi^{-1} : V \to U$ est une *paramétrisation locale* de la variété M.

Un *atlas* de M est un ensemble de cartes $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ recouvrant M, i.e. tel que $M = \cup_{i \in I} U_i$.

2.3.1 Exemples de variétés

- L'espace $\mathbb{R}^n$, un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sont des variétés topologiques de dimension n (en particulier, l'ensemble vide est une variété de dimension n pour tout n).
- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors son graphe

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}$$

  est une variété topologique de dimension n.

  La projection $\phi : \Gamma_f \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x, y) = x$ est une carte dont le domaine recouvre Γ_f, donc $\{(\Gamma_f, \phi)\}$ est un atlas de cette variété. L'inverse de cette carte est la paramétrisation $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \Gamma_f$ définie par $x \to (x, f(x))$.
- La sphère $\mathbb{S}^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|z\| = 1\}$ est une variété topologique de dimension n.

  Observons que $S^n_+ = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{H}^{n+1}$ est le graphe sur $\mathbb{B}^n$ de la fonction $f(x) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}$. En changeant d'axe privilégié, on obtient d'autres cartes sur la sphère et on construit un atlas.
- Si M et N sont des variétés topologiques de même dimension n, alors la réunion disjointe $M \sqcup N$ est une variété de dimension n.

- Si M et N sont des variétés de dimension m et n, alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété de dimension $m + n$.
- Le *tore* de dimension n est la variété

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}.$$

2.4 Variétés topologiques à bord

On note $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n > 0\}$ le "demi-espace supérieur". On note aussi $\overline{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n \geq 0\}$ son adhérence. La frontière se note

$$\partial \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n = 0\},$$

et on dit que c'est le *bord* de $\mathbb{H}^n$.

Proposition 2.4.1 (Invariance du bord) *Soient U, V deux ouverts de*

$$\overline{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n \geq 0\}$$

(pour la topologie relative) et $f : U \to V$ un homéomorphisme. Alors $f(U \cap \partial \mathbb{H}^n) \subset \partial \mathbb{H}^n$.

Nous laissons la preuve en exercice (il faut utiliser le théorème d'invariance du domaine de Brouwer).

Définition 2.4.1 Une variété topologique à bord de dimension n (où n est un entier naturel) est un espace topologique M tel que

1.) M est séparé,

2.) M a une base dénombrable d'ouverts,

3.) M est localement homéomorphe à $\overline{\mathbb{H}}^n$.

La dernière condition signifie que pour tout point $p \in M$ il existe un ouvert $U \subset M$ contenant p, un ouvert $V \subset \overline{\mathbb{H}}^n$ ou $V \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\phi : U \to V$.

Un peu de terminologie :
Les notions de cartes, de paramétrisation et d'atlas se généralisent immédiatement au cas des variétés à bord. L'homéomorphisme $\phi : U \to V$ est une *carte locale* au voisinage de p et l'inverse $\phi^{-1} : V \to U$ est une *paramétrisation locale* de la variété M. Un *atlas* de M est un ensemble de cartes $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ recouvrant M, i.e. tel que
$M = \cup_{i \in I} U_i$.

Un point $p \in M$ est un point du *bord* de M s'il existe une carte locale (U, ϕ) au voisinage de p telle que $\phi(p) \in \partial \overline{\mathbb{H}}^n$ (on peut montrer que cette propriété est alors vérifiée pour toute carte locale en p). On note $\partial M \subset M$ l'ensemble des points du bord de M. Un point *intérieur* de M est un point de M qui n'est pas un point du bord. On note $\mathrm{Int}(M) = M \setminus \partial M$ l'ensemble des points intérieurs.

On montre facilement que le bord ∂M d'une variété topologique de dimension m est une variété topologique de dimension $m - 1$, et que cette variété est sans-bord : $\partial \partial M = \emptyset$.

2.4.1 Exemples de variétés à bord

- Toute variété topologique au sens de la définition précédente est une variété topologique à bord, (mais dont le bord est l'ensemble vide).
- $\overline{\mathbb{H}}^n$ et un ouvert W de $\overline{\mathbb{H}}^n$ sont des variétés topologique à bord de dimension n.
- Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : V \to \mathbb{R}$ est continue, alors
$$\overline{V}_f = \{(x,y) \in V \times \mathbb{R} \,\big|\, y \geq f(x)\}$$
est une variété à bord. Son bord est le graphe
$$\partial V_f = \Gamma_f = \{(x,y) \in V \times \mathbb{R} \,\big|\, y = f(x)\},$$
et son intérieur est le surgraphe (ou épigraphe) $\{(x,y) \in V \times \mathbb{R} \,\big|\, y > f(x)\}$.
- La boule fermée $\overline{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x\| \leq 1\}$ est une variété. Son bord est $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.
- Si M et N sont des variétés à bord de même dimension n, alors la réunion disjointe $M \sqcup N$ est une variété à bord de dimension n.
- Si M et N sont des variétés à bord de dimension m et n, alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété une variété topologique à bord de dimension $m+n$.
- En particulier le cube $\mathbb{I}^n = [-1,1]^n$ est le produit cartésien itéré n fois de l'intervalle $\mathbb{I} = [-1,1]$ c'est donc une variété topologique à bord.

2.5 Rappels sur la topologie quotient

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, Y un ensemble et $\pi : X \to Y$ une application surjective. On définit une collection d'ensembles $\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{P}(Y)$ en posant
$$\mathcal{O}_Y = \{V \subset Y \,\big|\, \pi^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X\},$$

Lemme 2.5.1 *$\mathcal{O}_Y$ est une topologie sur Y.*

Cette topologie est la *topologie quotient* sur Y définie par la projection π. Pour cette topologie, $V \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V) \subset X$ est ouvert.

Notons que cette topologie est souvent non séparée, même lorsque l'espace topologique $(X, \mathcal{O}_X)$ a de bonnes propriétés.

Preuve. On a $Y \in \mathcal{O}_Y$ car $\pi^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$. De même $\emptyset \in \mathcal{O}_Y$ car $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$.
Si $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y$, alors $\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}_X$, par conséquent $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}_Y$.
Finalement, si $\{V_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{O}_Y$, alors $\pi^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) = \cup_{i\in I}\pi^{-1}(V_i) \in \mathcal{O}_X$, et donc $\cup_{i\in I} V_i \in \mathcal{O}_Y$.

□

Un exemple important : l'espace projectif.
On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ en posant $x \sim y$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \lambda x$. L'espace topologique quotient s'appelle l'*espace projectif* de dimension n et se note
$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim\, = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \mathbb{R}^*.$$

Observer que $\mathbb{RP}^n$ est aussi le quotient de la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'identification d'un point x avec son antipode $-x$:
$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / (x \sim -x).$$

On peut facilement montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique de dimension n.

2.6 Construction de variétés par recollement

Soit M une variété à bord de dimension n et N_1, N_2 deux composantes connexes distinctes du bord.
Soit $f : N_1 \to N_2$ un homéomorphisme. On définit alors une relation d'équivalence qui consiste à identifier un point $x \in N_1$ avec son image $f(x) \in N_2$. Plus précisément :

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y, \text{ ou} \\ x \in N_1 \text{ et } y = f(x), \text{ ou} \\ y \in N_1 \text{ et } x = f(y). \end{cases}$$

Proposition 2.6.1 *L'espace quotient $M' = M/\sim$, muni de la topologie quotient est une variété de dimension n. Son bord est*

$$\partial M' = \partial M \setminus (N_1 \cup N_2),$$

et son intérieur est la réunion de l'intérieur de N et de la classe d'équivalence de N_1.

Définition On dit que $M' = M/\sim$ est obtenue en *recollant* N_1 et N_2 *le long de* f, on note cette variété M/f. La partie $[N_1] \subset M$ correspondant à l'image de $N_1 \sim N_2$ est la *couture.*

Exemples
1. Si $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et si l'application f identifie les deux points du bord $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$ (donc $f(a) = b$), alors le quotient est homéomorphe au cercle :

$$M/f = M/\partial M \cong \mathbb{S}^1.$$

2. Le *cylindre ouvert* $C = \mathbb{S}^1 \times (a, b)$ s'obtient en identifiant les composantes du bord $\{0\} \times (a, b)$ et $\{1\} \times (a, b)$ de $M = [0, 1] \times (a, b)$ par l'application $(0, y) \mapsto (1, y)$.

3. Soit M le cylindre fermé $\mathbb{S}^1 \times [a, b]$, et $N_1 = \mathbb{S}^1 \times \{a\}$, $N_2 = \mathbb{S}^1 \times \{b\}$. Soit $f : N_1 \to N_2$ l'homéomorphisme $f(x, a) = (x, b)$. Alors la variété obtenue par recollement des deux cercles de ∂M le long de l'application f est le tore $\mathbb{T}^2$:

$$M/f = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2.$$

4. Le *ruban de Möbius* M s'obtient en identifiant les composantes du bord de $(0, 1) \times [0, 1]$ par l'application $(x, 0) \mapsto (1 - x, 1)$.

5. Le *double* d'une variété à bord M est obtenu en considérant la réunion disjointe $M \sqcup M = M \times \{0, 1\}$ et en identifiant $\partial M \times \{0\}$ et $\partial M \times \{1\}$ par l'application $f(x, 0) = (x, 1)$. C'est une variété sans bord.
Par exemple le double de la boule fermée $\overline{\mathbb{B}}^n$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$.

6. Le double du ruban de Möbius s'appelle la *bouteille de Klein.*

2.7 Le "mapping torus" d'un self-homéomorphisme

Soit N une variété topologique sans bord de dimension n et $f : N \to N$ un homéomorphisme. Alors $M = N \times [0, 1]$ est une variété à bord de dimension $n + 1$ et

$$\partial M = N \times \{0\} \cup N \times \{1\} = N \sqcup N.$$

On note
$$N_{[f]} = M/f = M/\sim$$
(où $(x,0) \sim (f(x),1)$ pour tout $x \in N$). Alors $N_{[f]}$ est une variété sans bord de dimension $n+1$, on l'appelle le *mapping torus* de f (ou de (N,f)).

Exemples

i) Si $N = \{*\}$ (= un espace avec un seul point), alors $N_{[f]} = \mathbb{S}^1$ est un cercle.

ii) Si $N = \mathbb{S}^1$, et $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est l'application identité alors $N_{[f]} = \mathbb{T}^2$ est un tore.

iii) Si $N = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et $f(x) = 1 - x$, alors $N_{[f]} = \mathbb{M}^2$ est un ruban de Möbius.

2.8 Somme connexe de deux variétés

Soient M_1 et M_2 deux variétés connexes de dimension n. Choisissons des ouverts $B_1 \subset M_1$ et $B_2 \subset M_2$ tels que l'adhérence $\overline{B}_i \subset \mathrm{Int}(M_i)$ est homéomorphe à la boule unité $\overline{\mathbb{B}}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Définition La *somme connexe* de M_1 et M_2 est la variété
$$M = ((M_1 \setminus B_1) \sqcup (M_2 \setminus B_2))\,/f$$
où $f : \partial\overline{B}_1 \to \partial\overline{B}_2$ est un homéomorphisme.

Théorème 2.8.1 *Le type topologique de M est indépendant des choix effectués (i.e. du choix des boules $B_1 \subset M_1$ et $B_2 \subset M_2$ et du choix de $f : \partial\overline{B}_1 \to \partial\overline{B}_2$).*

La somme connexe de M_1 et M_2 se note $M_1\#M_2$. Il est clair que cette opération est commutative (i.e. $M_1\#M_2$ est homéomorphe à $M_2\#M_1$) et le théorème précédent entraîne qu'elle est associative : $(M_1\#M_2)\#M_3$ est homéomorphe à $M_1\#(M_2\#M_3)$.

Exercices : 1.) $\partial(M_1\#M_2) = \partial M_1 \sqcup \partial M_2$.

2.) Pour toute variété M de dimension n, on a $M\#\mathbb{S}^n = M$ (la sphère est donc un élément neutre pour la somme connexe). En particulier $\mathbb{S}^n\#\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n$.

2.9 Classification des variétés de dimension 1

On verra en exercice le résultat suivant : *Soit M une variété topologique connexe à bord de dimension* 1. *Alors M est homéomorphe à une et une seule des variétés suivantes :*
$$\mathbb{S}^1, \quad [0,1], \qquad [0,1), \quad \text{ou} \quad (0,1).$$

2.10 Classification des surfaces

Une *surface* est une variété topologique de dimension 2. La surface est dite *non-orientable* si elle contient un ouvert homéomorphe à un ruban de Möbius et *orientable* dans le cas contraire.

Théorème 2.10.1 (Théorème de classification des surfaces topologique) *Soit S une surface connexe, compacte et sans bord. Alors S est homéomorphe une et une seule des surfaces suivantes :*

i.) $S \simeq \mathbb{S}^2$ *;*

ii.) $S \simeq \Sigma_g := \mathbb{S}^2\#\underbrace{\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\cdots\#\mathbb{T}^2}_{g}$ *;*

iii.) $S \simeq K_k := \mathbb{S}^2 \# \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{k}$.

La surface est orientable dans les cas (i) et (ii) et non-orientable dans le cas (iii).

$K_1 = \mathbb{RP}^2$, K_2 est la bouteille de Klein. La surface Σ_g s'appelle la surface orientable de *genre* g. Il est clair que

$$\Sigma_g \# \Sigma_{g'} = \Sigma_{g+g'} \qquad \text{et} \qquad K_k \# K_{k'} = K_{k+k'}.$$

On montre aussi que

$$\Sigma_g \# K_k = K_{k+2g}.$$

Pour démontrer par exemple que $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas homéomorphes, on peut par exemple prouver que la sphère $\mathbb{S}^2$ est simplement connexe et que $\mathbb{RP}^2$ est non simplement connexe. Dire qu'un espace topologique X est *simplement connexe* signifie que toute courbe fermée, i.e. toute application continue $\mathbb{S}^1 \to X$ se déforme continûment en une application constante.

Remarque : D'après le livre de John M. Lee *Introduction to Topological Manifolds* le théorème de classification des surfaces aurait été démontré en 1907 par Max Dehn et Paul Heegaard.

2.11 Quelques mots au sujet des variétés de dimension 3

L'études des variétés de dimension 3 remonte historiquement aux travaux de Henri Poincaré, ce problème a occupé les plus grands topologues tout au long du 20ème siècle. Citons deux résultats décrivant la structure de ces variétés.
On commence par une définition :

Définition 2.11.1 Une variété compacte sans bord M de dimension 3 est dite *première* si elle ne peut pas s'écrire de façon non triviale comme somme connexe de deux variétés. Cela veut dire que si M est homéomorphe à une somme connexe $M_1 \# M_2$, alors ou bien M_1 ou bien M_2 est homéomorphe à une sphère S^3.

Théorème 2.11.1 (Kneser-Milnor) *Toute variété compacte sans bord M de dimension 3 admet une décomposition en somme connexe*

$$M \cong M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_k$$

où chaque M_j est une 3-variété première. De plus cette décomposition est unique à un changement de l'ordre des facteurs près.

Une autre construction intéressante est basée sur la notion de *chirurgie de Dehn.*

Définition 2.11.2 Un *noeud* dans une variété de dimension 3 M est une sous-ensemble homéomorphe au cercle S^1. Un *noeud solide* dans M est un sous-ensemble homéomoprphe à $\overline{D}^2 \times S^1$ où D^2 est le disque standard dans le plan. Si $W \subset M$ est un noeud solide dans la variété sans bord de dimension 3 M et W^0 est son intérieur, alors $M \setminus W^0$ est une variété à bord dont le bord est homéomorphe à un tore T^2 $(= \partial W)$. Si $\varphi : T^2 \to \partial(M \setminus W^0)$ est un homéomorphisme, alors on obtient une nouvelle variété en recollant un tore solide à $M \setminus W^0$ le long de φ :

$$M' = (M \setminus W^0) \cup_\varphi (\overline{D}^2 \times S^1).$$

On dit que la variété obtenue ainsi est une *chirurgie de Dehn* le long du noeud choisi.

Voici comment on peut penser à une chirurgie de Dehn : on choisit un noeud dans la variété, puis on prend un petit voisinage de ce noeud qui est topologiquement un tore solide. On retire ce tore solide de la variété, puis on le recolle, mais après avoir choisit un homéomorphisme plus ou moins compliqué du bord T^2. Contrairement à l'opération de somme connexe, la chirurgie de Dehn dépend fortement des éléments choisis (le noeud et l'homéomorphisme de recollement).

Théorème 2.11.2 (Lickorich-Wallace) *Toute variété compacte sans bord M de dimension 3 s'obtient à partir de la sphère S^3 par une suite de chirurgies de Dehn.*

2.12 Un peu d'histoire

La topologie comme discipline mathématique autonome n'a émergé que très graduellement au cours du XIX^e siècle et durant le premier tiers du XX^e siècle. On parlait au début d'*analysis situs*, et, bien que le mot de *topologie* remonte à 1847 (Johann Benedict Listing), il ne fut adopté systématiquement que dans les années 1915-1920 (Hausdorff, Kuratowski...).

Durant la période 1895-1904, Henri Poincaré publie un mémoire intitulé simplement "Analysis situs" suivi de cinq "compléments". Ces textes ont joués un rôle de première importance dans le développement des mathématiques du XX^e siècle et jusqu'à aujourd'hui. C'est dans ce travail qu'apparaît une première définition de la notion de variété (la définition de Poincaré d'une variété diffère un peu de la définition moderne). Poincaré introduit aussi les concepts de *groupe fondamental*, d'*homologie* et d'*homologie*. Il faut toutefois attendre les années 1930 pour qu'une définition moderne du concept de variété apparaisse et que le théorie démarre vraiment. Parmi les mathématiciens importants qui contribuent à la théorie durant ces années, citons O. Veblen, J.H.C. Whitehead, S. S. Cairns, H. Whitney, E. Cartan et G. de Rham.

La classification des surfaces (variété de dimension 2) était connue au début du XX^e siècle. La classification des variétés de dimension 3 a occupé les meilleurs topologues pendant presque tout le 20ème siècle. A la fin des années 1970, William Thurston propose une conjecture décrivant toutes les variétés compactes de dimension 3 à partir d'un système de découpage topologique et de structures géométriques canonique dont on peut munir chaque morceau du découpage. La "conjecture de Thurston" a été démontrée par étapes durant les 30 dernières années. La dernière étape ayant été établie par Grigori Iakovlevitch Perelman en 2003. La classification des variétés de dimension 3 est ainsi l'aboutissement d'efforts cumulés des plus grands mathématiciens sur plusieurs générations et s'appuie sur des techniques variées de topologie, de géométrie et d'équations aux dérivées partielles.

Ce programme contient en particulier la fameuse conjecture de Poincaré, formulée en 1904 dans le 5ème supplément à l'Analysais Situs, et qui s'énonce ainsi : *Toute variété de dimension 3 compacte sans bord et simplement connexe est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$.*

Nous ne pouvons pas décrire ici cette classification dans un cours d'introduction. Deux références importantes sont les livres (avancés) suivants :

◦ W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology.* Vol. 1. Princeton University Press, 1997

◦ L. Bessières, G. Besson, Gérard, S. Maillot, M. Boileau, J. Porti, Joan *Geometrisation of 3-manifolds.* European Mathematical Society, Zürich, 2010.

Il existe quelques livres de vulgarisation sur cette histoire. Par exemple celui de George Szpiro La *conjecture de Poincaré : Comment Grigori Perelman a résolu l'une des plus grandes énigmes mathématiques.*