EPFL - Automne 2017	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	**Exercices**
Série 6	26 octobre

Exercice 6.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. *L'épigraphe* de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par

$$\operatorname{Epi}(f) = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(x)\big\}$$

Montrer que $\operatorname{Epi}(f)$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$ est une variété à bord, de dimension $n+1$. Quel est son bord ?

Exercice 6.2. L'espace projectif réel, noté $\mathbb{RP}^n$, est défini comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la topologie quotient déterminée par la projection naturelle

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$$

qui envoie $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur $\operatorname{Span}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On note $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ l'image dans $\mathbb{RP}^n$ de $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique.
Indication: Pour tout $1 \leq i \leq n+1$ considérer l'ensemble

$$U_i := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}.$$

Exercice 6.3. On se donne un homéomorphisme $f_0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ et on considère les deux variétés à bord

$$M_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \mid t \geq 1\} \quad \text{et} \quad M_- := \{(x,s) \in \mathbb{R}^n \mid s \leq -1\}.$$

On a alors un homéomorphisme $f : \partial M_- \to \partial M_+$ défini par $f(x,-1) = (f_0(x), 1)$. Montrer qu'on peut construire un homéomorphisme

$$F : M/f \to \mathbb{R}^n,$$

avec $M := M_+ \cup M_-$.
Indication: Faire un dessin de la situation et penser à ce que l'on veut faire: recoller deux morceaux de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.4. Soit M une variété topologique et $N_1, N_2 \subset \partial M$ deux composantes connexes distinctes de son bord. Supposons donné un homéomorphisme $f : N_2 \to N_1$. Rappeler la définition de l'espace topologique M/f, puis utiliser l'exercice précédent pour montrer que M/f est une variété topologique.

Exercice 6.5. Montrer que la sphere $\mathbb{S}^n$ est un élément neutre pour la somme connexe. Plus précisément, si M est une variété topologique de dimension n, montrer que $M \# \mathbb{S}^n \cong M$.

Exercice 6.6. Déterminer l'espace topologique $\mathbb{RP}^2 \setminus D$, où D est un disque.

Exercice 6.7. Dans cet exercice, on construit un atlas de la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ à l'aide de la projection stéréographique.
Considérons le pôle nord de la sphère $e_{n+1} \equiv (0, \cdots, 0, 1)$, et posons E le complément orthogonal du vecteur $\vec{e}_{n+1}$, i.e., l'hyperplan défini par l'équation $x_{n+1} = 0$. Soit $\varphi : \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \to E$ la projection centrale à travers e_{n+1}. En particulier, pour $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$, le point $\varphi(x)$ est l'intersection entre E et le segment joignant e_{n+1} et x.

(a) Est-il possible de recouvrir $\mathbb{S}^n$ avec une seule carte?

(b) Trouver une expression explicite pour φ. En particulier, étant donné $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, trouver explicitement les coordonnées de $\varphi(x) \in E$.

(c) Quel est le domaine de φ? Et quelle est son image?

(d) Montrer que φ est un homéomorphisme.

(e) Trouver un atlas pour $\mathbb{S}^n$.