

Exercice 5.1. Dans cet exercice, on s'intéresse aux matrices de rang exactement r .

- (a) Montrer que l'ensemble des matrices 2×2 de rang 1 est une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^4 = M_2(\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que l'ensemble des matrices $n \times m$ de rang r est une sous-variété de codimension $(n-r)(m-r)$.

Indication: Quitte à appliquer une suite de difféomorphismes dans $M_{n \times m}(\mathbb{R})$, une matrice A de rang r peut toujours s'écrire sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},$$

avec $X \in M_{r \times r}(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et $Y \in M_{r \times (m-r)}(\mathbb{R})$, $Z \in M_{(n-r) \times r}(\mathbb{R})$ et finalement $T \in M_{(n-r) \times (m-r)}(\mathbb{R})$. À partir de cette forme, montrer que $\text{rang}(A) = r$ si et seulement si $T - ZX^{-1}Y = 0$

Solution 5.1. Pour cet exercice, notons $M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times m$ de rang r dans $M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

- (a) On veut montrer que $M_2^1(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension 3 dans $M_2(\mathbb{R})$. Considérons une fois de plus l'application déterminant

$$\det : M_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors si on montre que cette application est une submersion on pourra utiliser le critère de l'exercice 3.1 puisque

$$M_2^1(\mathbb{R}) = \det^{-1}(0).$$

Or, on a calculé à l'exercice 2.2 (d) que la différentielle du déterminant est donnée par

$$d\det_A(H) = \text{Tr}(\text{Cof}(A)^T H),$$

ainsi si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors $\text{Cof}(A)^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, d'où

$$d\det_A(H) = h_{11}d - h_{12}c - h_{21}b + h_{22}a, \quad \text{où} \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme l'un des coefficients de A est non nul, disons d sans perte de généralité, on a que tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ s'obtient comme $d\det_A(H)$, avec $H = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce qui achève de démontrer que $\det$ est une submersion sur $M_2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et donc (via l'exercice 3.1) que $\det^{-1}(\{0\}) = M_2^1(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $4 - 1 = 3$ de $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$.

- (b) On considère donc une matrice $A \in M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ (avec $r < n$) que l'on suppose (quitte à appliquer des difféomorphismes) de la forme

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

avec X, Y, Z et T comme dans l'indication. Comme $\text{rang}(A) = r$, toutes les colonnes de A après la r -ème colonne sont combinaisons linéaires des r premières. Ainsi, il existe une matrice $R \in M_{r \times (m-r)}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} Y \\ T \end{pmatrix} \iff \begin{cases} XR = Y \\ ZR = T \end{cases}$$

Or X est inversible, donc $R = X^{-1}Y$ et ainsi $T = ZR = ZX^{-1}Y$. On a donc que

$$A \text{ est de rang } r \iff T = ZX^{-1}Y.$$

On souhaite montrer que A admet un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^{nm} = M_{n \times m}(\mathbb{R})$ et qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{nm}$ et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tel que

$$\varphi(U \cap M_{n \times m}^r(\mathbb{R})) = V \cap (\mathbb{R}^{nm-(n-r)(m-r)} \times \{0\}).$$

Observons tout d'abord qu'il suffit de démontrer que A est contenu dans une sous-variété de dimension $d = nm - (n-r)(m-r)$ de $M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$. Pour trouver cette sous-variété, on va utiliser le critère de l'exercice 3.1, i.e. on va trouver une submersion $\varphi : U_A \rightarrow M_{(n-r) \times (m-r)}(\mathbb{R})$, où U_A est un ouvert de $M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ autour de A , ainsi $\varphi^{-1}(0)$ sera une sous-variété contenant A .

Pour ce faire, on considère l'ouvert U_A autour de A dans $M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ donné par

$$U_A = \left\{ \begin{pmatrix} X + \epsilon X_1 & Y + \epsilon Y_1 \\ Z + \epsilon Z_1 & T + \epsilon T_1 \end{pmatrix} \middle| X + \epsilon X_1 \in \text{GL}_r(\mathbb{R}) \right\} \cap M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$$

ainsi que l'application

$$\Phi : U_A \longrightarrow M_{(n-r) \times (m-r)}(\mathbb{R}), \quad \Phi(A) = T - ZX^{-1}Y.$$

Montrons à présent que Φ est une submersion en calculant sa différentielle. Soit $H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}$ avec les blocs de mêmes dimensions que X, Y, Z et T . Alors

$$\begin{aligned} d\Phi_A(H) &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \Phi(A + tH) \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} ((T + tH_4) - (Z + tH_3)(X + tH_1)^{-1}(Y + tH_2)) \\ &= H_4 - H_3X^{-1}Y + ZX^{-1}H_1X^{-1}Y - ZX^{-1}H_2. \end{aligned}$$

Maintenant, étant donnée une matrice $M \in M_{(n-r) \times (m-r)}(\mathbb{R})$, il suffit de poser $H_4 = M$ et $H_1 = H_2 = H_3 = 0$ pour avoir $d\Phi_A(H) = M$, d'où la surjectivité de la différentielle de Φ en tout point de U_A . Ainsi Φ est bien une submersion et $\Phi^{-1}(0)$ est bien une sous-variété de $M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ contenant A . Finalement, on a donc montré que tout point $A \in M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ admet un voisinage qui est une sous-variété de $M_{n \times m}^r(\mathbb{R})$ de codimension $(n-r)(m-r)$.

Exercice 5.2. (a) On note u, v les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ et x, y, z les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 est une immersion si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \neq \mathbf{0}$$

pour tout $(u, v) \in U$ où $\times$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Vérifier que l'application $f : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(u, v) = \left(2 \cos(u) + v \cos(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right), 2 \sin u + v \cos(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right), v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

est une immersion (une application définie sur un fermé de $\mathbb{R}^m$ est une immersion si c'est la restriction d'une immersion définie sur un voisinage de ce fermé).

(c) Prouver que l'image de $S = f([0, 2\pi] \times [-1, 1])$ est une variété.

(d) Montrer que S est homéomorphe au ruban de Möbius.

Indication. Pour chaque $v \in [-1, 1]$ identifier la courbe $u \mapsto f(u, v)$ puis pour chaque $u \in [0, 2\pi]$ identifier la courbe $v \mapsto f(u, v)$.

Solution 5.2. (a) Rappelons que deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement si $x \times y = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} f \text{ est une immersion} &\iff df_p \text{ est injective pour tout } p \in U \\ &\iff \text{rang}_f(p) = 2 \text{ pour tout } p \in U \\ &\iff \text{Les colonnes de la matrice jacobienne de } f \text{ sont linéairements indépendantes} \\ &\iff \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0. \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas présent, les composantes de $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$ sont données par

$$\left(\frac{\partial f^2}{\partial u} \frac{\partial f^3}{\partial v} - \frac{\partial f^3}{\partial u} \frac{\partial f^2}{\partial v}, \frac{\partial f^3}{\partial u} \frac{\partial f^1}{\partial v} - \frac{\partial f^1}{\partial u} \frac{\partial f^3}{\partial v}, \frac{\partial f^1}{\partial u} \frac{\partial f^2}{\partial v} - \frac{\partial f^2}{\partial u} \frac{\partial f^1}{\partial v} \right),$$

qui sont exactement les déterminants des mineurs 2×2 de la matrice jacobienne de f .

(b) Pour cette paramétrisation, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \left(-2 \sin u - v \sin u \cos \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \cos u \sin \frac{u}{2}, 2 \cos u - v \sin u \cos \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \cos u \sin \frac{u}{2}, \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \left(\cos u \cos \frac{u}{2}, \cos u \sin \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = \left(-v \sin u + \left(2 + v \cos \frac{u}{2} \right) \cos u \sin \frac{u}{2}, v \cos u + \left(2 + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin u \sin \frac{u}{2}, -2 \cos \frac{u}{2} \left(2 + v \cos \frac{u}{2} \right) \right).$$

La troisième composante de ce vecteur s'annule si et seulement si $\cos \frac{u}{2} = 0$ car pour $v \in [-1, 1]$ on a $v \cos \frac{u}{2} > -1$. Or

$$\cos \frac{u}{2} = 0 \iff u = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donc $u = \pi$. Mais pour $u = \pi$, la première composante de $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$ vaut

$$-v \sin \pi + \left(2 + v \cos \frac{\pi}{2} \right) \cos \pi \sin \frac{\pi}{2} = -2 \neq 0,$$

d'où $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$ pour tout $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Comme on peut trouver un voisinage de $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$ sur lequel $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$ ne s'annule pas, il suit que f est la restriction d'une immersion définie sur un voisinage ouvert de $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$.

(c) On remarque tout d'abord que cette paramétrisation est construite en partant du segment de droite entre les points $(1, -1, 0)$ et $(3, 1, 0)$ (ces points sont obtenus en prenant $u = 0$ et $v = \pm 1$) et en le faisant tourner à la fois autour de l'axe Oz (d'un tour complet: paramètre $u \in [0, 2\pi]$) et sur lui-même (d'un demi-tour: paramètre $\frac{u}{2} \in [0, \pi]$). La surface S s'écrit donc comme une union disjointe de segments qui sont tous obtenus à partir d'un segment initial par rotation. Une telle surface est dite *règlée*.

On introduit la relation d'équivalence suivante sur $A = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$:

$$(0, t) \sim (2\pi, -t), \quad \text{pour tout } t \in [-1, 1],$$

et on note $M = A/\sim$ le quotient par cette relation d'équivalence. Par la propriété universelle du quotient, il existe une unique application continue $\tilde{f} : M \rightarrow S$ telle que $f = \tilde{f} \circ q$, où $q : A \rightarrow M$ est l'application quotient. Il est clair d'après la construction de la paramétrisation que S et M sont en bijection (on a "éliminé" les points qui posaient problème pour l'injectivité en quotientant). De plus, M est compact puisque f est continue et A compact, et S est séparé, ainsi par un résultat standard de topologie (c.f. cours de topologie), $\tilde{f}$ est fermée. Or une application bijective et fermée est aussi ouverte, donc $\tilde{f}$ est un homéomorphisme. Il suffit donc de montrer que M est une variété topologique. Or,

- (i) Comme M est muni de la topologie quotient, on obtient qu'un sous-ensemble $U \subset M$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U) = V \cap A$, avec V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ainsi on peut séparer les points de M avec des boules euclidiennes suffisamment petites.
- (ii) A nouveau, comme M est muni de la topologie quotient et que A est à base dénombrable d'ouverts, M l'est aussi.
- (iii) On cherche des voisinages de chaque point de M qui soient homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ ou $\overline{\mathbb{H}}^2$. Soit $x \in M$. Alors, si $q^{-1}(x) \in \text{int}(A)$, il suffit de prendre une boule euclidienne autour de x suffisamment petite pour qu'elle n'intersecte pas le bord de A . Si $x \in \partial A$, alors deux cas sont possibles. Si $q^{-1}(x) \in [0, 2\pi] \times \{\pm 1\}$, alors il suffit de prendre l'intersection d'une boule euclidienne B (suffisamment petite pour qu'elle n'intersecte pas $\{0, 2\pi\} \times [-1, 1]$) et de A pour que $q(B \cap A)$ soit homéomorphe à $\overline{\mathbb{H}}^2$. Finalement, si $q^{-1}(x) \subset \{0, 2\pi\} \times [-1, 1]$, alors $q^{-1}(x)$ est constitué de deux points de la forme $\{(0, t), (2\pi, -t)\}$ avec $t \in [-1, 1]$. On considère alors les deux ouverts de A suivants:

$$B_1 = B((0, t), r) \cap A \quad \text{et} \quad B_2 = B((2\pi, -t), r) \cap A, \quad r < \min\{|1 - t|, |1 + t|\}$$

On a alors que $q(B_1 \cup B_2) \cong B(0, 1) \cong \mathbb{R}^2$.

- (d) Au point précédent, nous avons montré que $S \cong A/\sim$. Or le ruban de Möbius est obtenu topologiquement en identifiant deux côtés du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ via la relation $(0, t) \sim (1, -t)$, ce qui est précisément la relation par laquelle nous avons quotienté A .

Exercice 5.3. Montrer que les espaces $\overline{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et $\overline{\mathbb{I}}^n = [0, 1]^n$ sont homéomorphes.

Solution 5.3. On a un homéomorphisme $\overline{\mathbb{B}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{I}}^n$ donné par

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \cdot x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5.4. Soient U, V deux ouverts de

$$\overline{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

(pour la topologie relative) et $f : U \rightarrow V$ un homéomorphisme. Alors $f(U \cap \partial \mathbb{H}^n) \subset \partial \mathbb{H}^n$.

Solution 5.4. Supposons que non. Alors il existe un point $p \in U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $q = f(p) \notin \mathbb{R}^{n-1}$. Donc il existe un voisinage $W \subset f(U)$ de q ne rencontrant pas $\mathbb{R}^{n-1} \subset \overline{\mathbb{H}}^n$. Mais le théorème d'invariance du domaine appliqué à $f^{-1}|_W$ nous dit que $f^{-1}(W) \subset U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Donc $p \in f^{-1}(W)$ est un point intérieur de $\overline{\mathbb{H}}^n$.

Exercice 5.5. Soient M et N deux variétés topologiques à bord de dimension m et n respectivement. Montrer que $M \times N$ est une variété topologique. Trouver sa dimension et déterminer son bord $\partial(M \times N)$ (proposer d'abord un exemple).

Solution 5.5. Montrons que $M \times N$ est une variété topologique à bord. L'espace topologique $M \times N$ est clairement de Hausdorff et possède une base dénombrable d'ouverts puisque M et N sont des variétés topologiques. Il faut donc montrer que tout point $(p, q) \in M \times N$ possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ou $\overline{\mathbb{H}}^d$ pour un certain d fixé.

- (1) si $p \in \text{int}(M)$ et $q \in \text{int}(N)$, alors il y a une carte locale $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (resp. $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$) puisque M et N sont des variétés topologiques. Ainsi,

$$\varphi \times \psi : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}.$$

Cette application est clairement un homéomorphisme local.

- (2) si $p \in \partial M$ et $q \in \text{int}(N)$, alors il existe une carte locale $\varphi : U \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^m$ (resp. $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$). A nouveau, l'application

$$\varphi \times \psi : U \times V \longrightarrow \overline{\mathbb{H}}^m \times \mathbb{R}^n \cong \overline{\mathbb{H}}^{m+n}$$

est un homéomorphisme local. Le cas $p \in \text{int}(M)$ et $q \in \partial N$ est similaire.

- (3) si $p \in \partial M$ et $q \in \partial N$, alors la même construction qu'avant produit un homéomorphisme local

$$\varphi \times \psi : U \times V \longrightarrow W,$$

où W est un ouvert de $\{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x_1, y_1 \geq 0\}$. Or, ce dernier espace est homéomorphe à $\overline{\mathbb{H}}^{m+n}$. En effet, l'application

$$f : \{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x_m, y_n \geq 0\} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^{m+n}$$

définie par

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} (x_1 - \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{4}}, x_2, \dots, x_m, y_1 - \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{4}}, y_2, \dots, y_n) & \text{si } x_1 \geq y_1 \\ (x_1 - \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{4}}, x_2, \dots, x_m, y_1 - \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{4}}, y_2, \dots, y_n) & \text{si } y_1 \geq x_1 \end{cases}$$

est clairement un homéomorphisme (faire un dessin de cette application pour comprendre d'où elle vient! On "déplie" un quadrant sur un demi-plan).

On a donc montré que $M \times N$ est une variété topologique à bord de dimension $m + n$. Par construction des cartes locales ci-dessus, on constate que l'ensemble des points de bord de $M \times N$ est donné par

$$\partial(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (N \times \partial M).$$

Exercice 5.6. Un espace non séparé localement homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Soit X la droite réelle avec l'origine dédoublée, c'est à dire $X = \mathbb{R} \amalg \{\alpha\}$. Les ouverts de X sont les réunions d'ouverts de $\mathbb{R}$ et d'ensembles de la forme $U \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}$ avec U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. Vérifier que l'on a bien défini une topologie sur X , que tout point de X est contenu dans un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$ mais que cette topologie n'est pas séparée.

Solution 5.6. Pour montrer que X est un espace topologique, il suffit de vérifier les axiomes. Appelons $\mathcal{T}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les réunions d'intervalles ouverts), et $\mathcal{T}'$ la collection définie dans la donnée.

- (i) Tout d'abord, vérifions que l'ensemble vide $\emptyset$ ainsi que l'ensemble total $\mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ sont dans $\mathcal{T}'$. Ceci est clair pour $\emptyset$. En effet, $\emptyset$ est dans $\mathcal{T}$, et donc il se trouve également dans $\mathcal{T}'$ car de manière évidente $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Voyons maintenant le cas de l'ensemble total. Soit $V \in \mathcal{T}$ un voisinage ouvert de l'origine pour la topologie $\mathcal{T}$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}$ est dans $\mathcal{T}'$ car $\mathbb{R}$ est un voisinage de 0. Ainsi, $U \cup \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}$ est dans $\mathcal{T}'$ comme réunion de deux éléments de $\mathcal{T}'$. Mais cet ensemble vaut $\mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ tout entier.
- (ii) Montrons maintenant qu'une réunion d'éléments de $\mathcal{T}'$ est encore un élément de $\mathcal{T}$. Un élément typique de $\mathcal{T}'$ est de la forme $U_i \cup (V_i \setminus \{0\} \cup \{\alpha\})$ où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$ et V_i est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Une réunion quelconque indexée par un ensemble I d'ensembles de cette forme est donc de la forme

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cup (V_i \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup \left(\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \setminus \{0\} \bigcup_{i \in I} \{\alpha\} \right)$$

Notons $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ et $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$ car ce sont des réunions d'ouverts de $\mathbb{R}$. Alors l'égalité au dessus s'écrit

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cup (V_i \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}) = U \cup (V \setminus \{0\} \cup \{\alpha\}).$$

C'est un élément de $\mathcal{T}'$ par définition.

(iii) Il faut encore montrer qu'une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ reste dans $\mathcal{T}$. C'est similaire au point précédent.

Pour trouver deux points qui ne sont pas séparés par des ouverts disjoints, on prend 0 et α .

Exercice 5.7. Trouver un exemple de variété topologique pour laquelle la frontière et le bord ne coïncident pas.

Solution 5.7. Il suffit de prendre un ouvert de $\overline{\mathbb{H}}^n$ de la forme $U = B(x, r) \cap \overline{\mathbb{H}}^n$, où $B(x, r)$ est une boule ouverte centrée en un point $x \in \mathbb{R}^{n-1} = \partial \overline{\mathbb{H}}^n$ de rayon $r > 0$. On a alors que la *frontière* de U est donnée par $\overline{U} \setminus \overset{\circ}{U} = \partial B(x, r) \cap \overline{\mathbb{H}}^n = S(x, r) \cap \overline{\mathbb{H}}^n$, où $S(x, r)$ est la sphère centrée en x de rayon r , alors que le *bord* de U est donné par $B(x, r) \cap \partial \overline{\mathbb{H}}^n = B(x, r) \cap \mathbb{R}^{n-1}$.