Exercice 7.1. Montrer que

(a) La sphère $\mathbb{S}^n$ munie de l'atlas à deux cartes obtenu à l'exercice 6.7 est une variété différentiable.

(b) L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ est une variété différentiable.

Exercice 7.2. Le but de cet exercice est de montrer que pour toute variété différentiable M de dimension n, il existe une application lisse et surjective de M vers $\mathbb{S}^n$. On procède en plusieurs étapes.

(a) Montrer que le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable.

(b) Montrer que $\hat{\mathbb{R}}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.

(c) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

   (i) $h \in C^\infty(\mathbb{R})$,
   (ii) $h'(r) \leq 0$ pour tout $r \geq 0$,
   (iii) $h(r) = 1$ si $0 \leq r \leq 1$ et $h(r) = 0$ si $r \geq 2$,

   i.e. une fonction plateau. Définissons ensuite $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{h(\|x\|)} & \text{si } \|x\| < 2, \\ \infty & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

   Montrer que f est lisse.

(d) Montrer que pour toute variété différentiable M de dimension n et pour tout $p \in M$, il existe une application $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ lisse, surjective et qui soit un difféomorphisme local au voisinage de p.

Exercice 7.3. *L'espace projectif complexe* $\mathbb{CP}^n$ est construit de la même façon que l'espace projectif réel: on quotiente $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence suivante

$$z \sim w \Longleftrightarrow z = \lambda w \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

i.e. $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. Montrer que

(a) $\mathbb{CP}^n$ une variété différentiable de dimension $2n$.

(b) $\mathbb{CP}^1$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{RP}^2$. *Indication:* Montrer que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Exercice 7.4. Soient M, N deux variétés différentiables et soit $F : M \to N$ une application. Montrer que F est différentiable si et seulement si

$$F^*(C^\infty(N)) \subset C^\infty(M),$$

où on rappelle que $F^*(h) = h \circ F$ pour toute fonction $h \in C^\infty(N)$.

Exercice 7.5. Soit M une variété différentiable. Montrer, en utilisant les fonctions plateaux, que $C_0^\infty(M)$ et $C^\infty(M)$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie sur $\mathbb{R}$.
Rappel: L'ensemble $C_0^\infty(M)$ est l'ensemble des fonctions lisses à support compact dans M.