

Exercice 7.1. Montrer que

- (a) La sphère $\mathbb{S}^n$ munie de l'atlas à deux cartes obtenu à l'exercice 6.7 est une variété différentiable.
- (b) L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ est une variété différentiable.

Solution 7.1. (a) Rappelons que les deux cartes (U, φ) et (V, ψ) données par la projection stéréographique sont

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, & \varphi(x) &= \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \right), \\ V &= \mathbb{S}^n \setminus \{S\}, & \psi(x) &= -\varphi(-x), \end{aligned}$$

où $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = -N$. De plus, l'inverse de φ est donné par

$$\varphi^{-1}(y) = \left(\frac{2y^1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y^n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

Nous devons vérifier que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est une application lisse. Ainsi

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1}(y) &= -\varphi \left(-\frac{2y^1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, -\frac{2y^n}{\|y\|^2 + 1}, -\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{y^1}{\|y\|^2}, \dots, \frac{y^n}{\|y\|^2} \right) \\ &= \frac{y}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

qui est une composition d'applications lisses sur $\varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et est donc lisse elle-même. D'autre part, son inverse est donné par la même formule. L'explication géométrique ce phénomène est que l'application $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ représente l'inversion à travers la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ et est donc son propre inverse.

- (b) On reprenant les notations de l'exercice 6.2, il faut montrer que les cartes (V_i, φ_i) sont C^∞ -compatibles. Si $i > j$, on trouve

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \left(\frac{u_1}{u_j}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{j+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u_i}{u_j}, \dots, \frac{u_n}{u_j} \right),$$

qui est clairement un difféomorphisme de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. Le raisonnement est similaire si $i < j$.

Exercice 7.2. Le but de cet exercice est de montrer que pour toute variété différentiable M de dimension n , il existe une application lisse et surjective de M vers $\mathbb{S}^n$. On procède en plusieurs étapes.

- (a) Montrer que le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable.
- (b) Montrer que $\hat{\mathbb{R}}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.
- (c) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- (i) $h \in C^\infty(\mathbb{R})$,
- (ii) $h'(r) \leq 0$ pour tout $r \geq 0$,
- (iii) $h(r) = 1$ si $0 \leq r \leq 1$ et $h(r) = 0$ si $r \geq 2$,

i.e. une fonction plateau. Définissons ensuite $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{h(\|x\|)} & \text{si } \|x\| < 2, \\ \infty & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Montrer que f est lisse.

- (d) Montrer que pour toute variété différentiable M de dimension n et pour tout $p \in M$, il existe une application $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ lisse, surjective et qui soit un difféomorphisme local au voisinage de p .

Solution 7.2. (a) On rappelle que la topologie sur $\hat{\mathbb{R}}^n$ est donnée par les ouverts de la topologie standard de $\mathbb{R}^n$ auxquels on rajoute les ensembles de la forme

$$\{\hat{\mathbb{R}}^n \setminus K \mid K \subset \mathbb{R}^n \text{ compact}\}.$$

Ainsi la topologie de $\hat{\mathbb{R}}^n$ est engendrée par les boules euclidiennes et le complémentaire (dans $\hat{\mathbb{R}}^n$) des boules euclidiennes fermées, et donc en particulier, $\hat{\mathbb{R}}^n$ est de Hausdorff et à base dénombrable. On a le système de cartes suivant:

$$U = \mathbb{R}^n, \quad \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

$$V = \hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|^2} & x \in \mathbb{R}^n, \\ 0 & x = \infty. \end{cases}$$

Sur $U \cap V = \hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{0, \infty\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on peut observer que ψ est son propre inverse et donc $\varphi \circ \psi^{-1} = \psi$ qui est différentiable en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$. On a évidemment aussi que $\psi \circ \varphi^{-1} = \psi$ et on a donc montré que $\hat{\mathbb{R}}^n$ est une variété différentiable.

- (b) On note $\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique (c.f. exercice 6.7) et on définit une application de la sphère vers $\hat{\mathbb{R}}^n$ par

$$f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^n, \quad f(x) = \begin{cases} \sigma(x) & x \neq N, \\ \infty & x = N. \end{cases}$$

Pour montrer que cette application est un difféomorphisme, il faut montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \hat{\mathbb{R}}^n)$ et $f^{-1} \in C^\infty(\hat{\mathbb{R}}^n, \mathbb{S}^n)$ et donc il faut regarder ces applications dans les cartes de $\mathbb{S}^n$ et $\hat{\mathbb{R}}^n$. On a deux cartes sur $\mathbb{S}^n$ que l'on écrit $(U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \sigma)$ et $(U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \rho)$, avec $\rho(x) = -\sigma(-x)$. Il y a quatre changements de cartes à vérifier:

- (i) $\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ \sigma^{-1} : \sigma(f^{-1}(U) \cap U_N) \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{R}^n}(U)$;
- (ii) $\psi \circ f \circ \sigma^{-1} : \sigma(f^{-1}(V) \cap U_N) \longrightarrow \psi(V)$;
- (iii) $\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ \rho^{-1} : \rho(f^{-1}(U) \cap U_S) \longrightarrow \text{id}_{\mathbb{R}^n}(U)$;
- (iv) $\psi \circ f \circ \rho^{-1} : \rho(f^{-1}(V) \cap U_S) \longrightarrow \psi(V)$.

Or, si $x \in \sigma(f^{-1}(U) \cap U_N) = \mathbb{R}^n$, alors $f \circ \sigma^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ est donc dans les cas (i) et (ii) la composition est bien lisse (puisque $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ et ψ sont différentiables). Dans les cas (iii) et (iv), la composition $f \circ \rho^{-1}$ correspond à l'inversion à travers la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$f \circ \rho^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|^2} & x \neq 0, \\ \infty & x = 0. \end{cases}$$

et en composant avec $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ ou ψ on obtient à nouveau soit l'identité soit l'inversion qui sont différentiables, ce qui montre que $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \hat{\mathbb{R}}^n)$. Le raisonnement pour f^{-1} est analogue.

(c) A nouveau, on regarde f dans les cartes. Comme $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable avec une seule carte $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$, il suffit de regarder les compositions suivantes:

- (i) $\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$;
- (ii) $\psi \circ f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Dans le premier cas, la composition avec les applications de cartes donne simplement $f(x) = \frac{x}{h(\|x\|)}$ qui est une composition d'applications lisses. Dans le cas (ii), on a

$$\psi \circ f(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|^2} = h(\|x\|) \frac{x}{\|x\|^2}$$

qui est à nouveau une composition d'applications lisses sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque h est lisse.

(d) Soit $p \in M$ est soit (U, φ) une carte au voisinage de p telle que $\varphi(p) = 0$ et $\varphi(U) \cong \mathbb{R}^n$. On construit alors l'application $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit:

$$F(q) = \begin{cases} f(\varphi(q)) & q \in U, \\ \infty & q \notin U. \end{cases}$$

Cette application est lisse par le point précédent et il n'est pas difficile de voir que f est surjective.

Exercice 7.3. L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ est construit de la même façon que l'espace projectif réel: on quotiente $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence suivante

$$z \sim w \iff z = \lambda w \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

i.e. $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Montrer que

- (a) $\mathbb{CP}^n$ une variété différentiable de dimension $2n$.
- (b) $\mathbb{CP}^1$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{RP}^2$. *Indication:* Montrer que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Solution 7.3. (a) On effectue la même construction de cartes que dans le cas réel.

(b) On montre d'abord que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. Soit l'application suivante:

$$f : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad f([z_1 : z_2]) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} & \text{si } z_2 \neq 0, \\ \infty & \text{si } z_2 = 0. \end{cases}$$

Son inverse est donnée par $f^{-1}(z) = [z : 1]$ si $z \neq \infty$ et $f^{-1}(\infty) = [1 : 0]$. Pour montrer la différentiabilité, il faut regarder f et f^{-1} dans les cartes. On a les cartes suivantes sur $\mathbb{CP}^1$ et sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (c.f. exercice 7.2):

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[1 : z] \in \mathbb{CP}^1 \mid z \in \mathbb{C}\}, & \varphi_1([1 : z]) &= z, & \varphi_1^{-1}(w) &= [1 : w], \\ U_2 &= \{[z : 1] \in \mathbb{CP}^1 \mid z \in \mathbb{C}\}, & \varphi_2([z : 1]) &= z, & \varphi_2^{-1}(w) &= [w : 1], \\ V_1 &= \mathbb{C}, & \psi_1(z) &= \text{id}_{\mathbb{C}}, \\ V_2 &= \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, & \psi_2(z) &= \frac{z}{|z|^2}. \end{aligned}$$

Il faut alors montrer que les compositions $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ sont différentiables, pour $1 \leq i, j \leq 2$.

(i) On a

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \underbrace{\varphi_1(f^{-1}(V_1) \cap U_1)}_{\mathbb{C}^*} \longrightarrow \underbrace{\psi_1(V_1)}_{\mathbb{C}}$$

qui vaut $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$ qui est différentiable sur $\mathbb{C}^*$ (attention, ici on parle de différentiabilité en tant qu'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ où l'on a identifié $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et non au sens complexe).

(ii) Ensuite,

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \underbrace{\varphi_1(f^{-1}(V_2) \cap U_1)}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \underbrace{\psi_2(V_2)}_{\mathbb{C}}$$

$$\text{vaut } \psi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(w) = \begin{cases} 0 & w = 0, \\ \bar{w} & w \neq 0, \end{cases} \text{ qui est bien différentiable sur } \mathbb{C}.$$

(iii) Puis,

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : \underbrace{\varphi_2(f^{-1}(V_1) \cap U_2)}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \underbrace{\psi_1(V_1)}_{\mathbb{C}}$$

est donnée par $\psi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(w) = w$ qui est différentiable sur $\mathbb{C}$.

(iv) Et enfin

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : \underbrace{\varphi_2(f^{-1}(V_2) \cap U_2)}_{\mathbb{C}^*} \longrightarrow \underbrace{\psi_2(V_2)}_{\mathbb{C}},$$

qui vaut $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(w) = \frac{w}{|w|^2}$ sur $\mathbb{C}^*$ et donc qui est bien différentiable.

Le raisonnement pour f^{-1} est analogue. Comme $\hat{\mathbb{C}}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^2$ par l'exercice 7.2(b), on a bien montré que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. On conclut en utilisant par exemple le théorème de classification des surfaces énoncé au cours pour voir que $\mathbb{CP}^1$ n'est pas difféomorphe (en fait même pas homéomorphe) à $\mathbb{RP}^2$.

Exercice 7.4. Soient M, N deux variétés différentiables et soit $F : M \rightarrow N$ une application. Montrer que F est différentiable si et seulement si

$$F^*(C^\infty(N)) \subset C^\infty(M),$$

où on rappelle que $F^*(h) = h \circ F$ pour toute fonction $h \in C^\infty(N)$.

Solution 7.4. Le sens direct est presque immédiat: si F est supposée lisse et si $h \in C^\infty(N)$, alors $F^*(h) = h \circ F$ est une composition d'applications lisses et est donc lisse elle-même, i.e. $F^*(h) \in C^\infty(M)$. Pour l'autre implication, on suppose que $h \circ F$ est lisse pour toute fonction lisse $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ et on veut montrer que F est $C^\infty(M, N)$ au sens du cours, i.e. pour toutes cartes (U, φ) dans M et (V, ψ) dans N l'application composée

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow \psi(V)$$

est C^∞ en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Tout d'abord, commençons par rappeler qu'une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est C^∞ si et seulement si chacune de ses composantes est C^∞ en tant qu'application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, il suffit de montrer que $\psi_i \circ F \circ \varphi$ est C^∞ pour tout $1 \leq i \leq \dim N$, où ψ_i désigne la i -ème composante de ψ . On aimerait appliquer l'hypothèse, mais en l'état la fonction ψ_i n'est définie que sur V et non sur tout N , c'est pourquoi il faut être un peu précautionneux. Afin d'étendre ψ_i à N , on considère une fonction $\eta_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit C^∞ et telle que $\eta_i(q) = 1$ pour tout $q \in V'$, avec $V' \subset V$ un ouvert autour de $F(p)$ tel que $\overline{V'} \subset V$, et $\eta_i(q) = 0$ pour tout $q \notin V$ (i.e. une fonction plateau à support compact dans V). On obtient alors une extension lisse de ψ_i dans un voisinage de $F(p)$ en posant

$$\psi'_i(q) = \begin{cases} \eta_i(q)\psi_i(q) & \text{si } q \in V, \\ 0 & \text{si } q \notin V \end{cases}$$

On a alors en appliquant l'hypothèse que $\psi'_i \circ F \in C^\infty(M)$ et donc la restriction de cette application à $F^{-1}(V') \cap U$ est aussi C^∞ , or comme $\eta_i \equiv 1$ sur V' on a

$$(\psi'_i \circ F)|_{F^{-1}(V') \cap U} = (\psi_i \circ F)|_{F^{-1}(V') \cap U},$$

d'où la différentiabilité de $\psi_i \circ F$ et donc de $\psi_i \circ F \circ \varphi$.

Exercice 7.5. Soit M une variété différentiable. Montrer, en utilisant les fonctions plateaux, que $C_0^\infty(M)$ et $C^\infty(M)$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie sur $\mathbb{R}$.

Rappel: L'ensemble $C_0^\infty(M)$ est l'ensemble des fonctions lisses à support compact dans M .

Solution 7.5. Let $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a plateau function satisfying

$$h(x) = 1 \text{ for } x \leq 1/8 \quad h(x) = 0 \text{ for } x \geq 1/4.$$

For every $n \in \mathbb{Z}$ we introduce the function $f_n(x) = h(|x - n|^2)$. Then the support of f_n is given by $\overline{B(n, 1/2)}$ which is compact, and as the composition of two smooth functions is smooth. Now suppose $g(x) = \sum_{i=1}^k a_i f_i(x) = 0$. Because the interior of the supports do not intersect if $g(x) = 0$ in the interior of the support of f_i then $a_i = 0$. Consequently the collection $\{f_i : i \in \mathbb{Z}\}$ is a linearly independent set, so $C_0^\infty(\mathbb{R})$ is infinite dimensional. For $\mathbb{R}^n$ consider $\xi \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, and let $f_\xi = h(|x - \xi|^2)$. Once again this family is linearly independent. Finally let $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a chart in the smooth atlas. Without loss of generality we may assume that φ is a homeomorphism onto $\mathbb{R}^n$. Then consider the family $f_\xi \circ \varphi$ and define

$$g_\xi = \begin{cases} f_\xi \circ \varphi(x) & x \in U \\ 0 & x \in M \setminus U \end{cases}.$$

This is smooth by construction as it is zero in any neighbourhood of $x \in \text{Fr}(U)$ as well as $x \in M \setminus U$, and once again the family is linearly independent and infinite, so $C_0^\infty(M)$ is infinite dimensional.