EPFL Automne 2018
Geometrie I, MATH-120

# Solution série 3

---

**Exercice 1.** 1. On suppose que $\phi$ présèrve les longueurs, i.e. $||\phi(\vec{u})|| = ||\vec{u}||$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et on montre qu'il s'agit d'une isométrie. Soient $P, Q$ deux points de $\mathbb{R}^2$ ; on a puisque $\phi$ est linéaire

$$d(\phi(Q), \phi(P)) = ||\phi(Q) - \phi(P)|| = ||\phi(\vec{PQ})|| = ||\vec{PQ}|| = d(P, Q).$$

2. On note $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ la base canonique et on suppose que $(\phi(\vec{e}_1), \phi(\vec{e}_2))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Par le point 1, il suffit de montrer que $\phi$ préserve la norme. Soit $\vec{u} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ de manière àavoir $||\vec{u}||^2 = \lambda^2 + \mu^2$. D'autre part, puisque les vecteurs $\phi(\vec{e}_1)$ et $\phi(\vec{e}_2)$ sont orthogonaux et ont norme 1, on trouve

$$||\phi(\vec{u})||^2 = ||\lambda\phi(\vec{e}_1) + \mu\phi(\vec{e}_2)||^2 = \lambda^2||\phi(\vec{e}_1)||^2 + \mu^2||\phi(\vec{e}_2)||^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

3. Si $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ est une base orthonormée, alors l'application linéaire $\phi$ définie par $\phi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ envoit $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{B}$ et satisfait la condition du point 2 ; il s'agit donc bien d'une isométrie.
4. C'est évident.

**Exercice 4.** 1. Soit $G = \mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)$ et on montre que $\varphi(G)$ est bien le barycentre de $\varphi(\mathcal{P}), \Lambda$. Il nous suffit pour cela d'utiliser le critère 1. de l'exo 3 ainsi que l'exo 2 :

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(P_i)} = \sum_i \lambda_i \varphi_0(\vec{GP_i}) = \varphi_0\left(\sum_i \lambda_i \vec{GP_i}\right) = \varphi_0(\vec{0}) = \vec{0}$$

comme souhaité.

2. On considère ici une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui présèrve les barycentres et on montre que celle-ci est affine. Remarquons que si l'on montre que $\psi := t_{-\varphi(0)} \circ \varphi$ (qui satisfait $\psi(0) = 0$) est linéaire, alors on aura montré que $\varphi$ est affine car $\varphi = t_{\varphi(0)} \circ \psi$. Notons juste que $\psi$ préserve aussi les barycentres.
Montrons donc que $\psi$ est linéaire : Soient $P, Q \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et on veut montrer que $\psi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q)$. On définit pour cela

$$\mathcal{P} = \{P, Q, 0\}\ ,\ \Lambda = \{\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu\}.$$

Puisque $\psi$ présèrve les barycentres on trouve

$$\psi(\lambda P + \mu Q) = \psi(\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)) = \mathrm{Bar}(\psi(\mathcal{P}), \Lambda) = \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q) + \underbrace{(1 - \lambda - \mu)\psi(0)}_{=0}.$$

3. On suppose maintenant que $\psi$ présèrve les barycentres de poids positifs ou nuls et montre que cela suffit à dire que $\psi$ est linéaire. On commence par montrer que $\psi$ satisfait les deux propriétés suivantes :

$$\psi(-P) = -\psi(P) \quad \text{et} \quad \psi(\lambda P) = \lambda\psi(P) \; \forall \; \lambda \geqslant 0. \tag{0.1}$$

Supposons que (0.1) soit vrai et soient $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On écrit

$$\psi(\lambda P + \mu Q) = \psi\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}(|\lambda| + |\mu|)\mathrm{sgn}(\lambda)P + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}(|\lambda| + |\mu|)\mathrm{sgn}(\mu)Q\right),$$

avec $\mathrm{sgn}(\lambda) = \pm 1$ le signe de $\lambda$. On peut maintenant choisir

$$\mathcal{P} = \{(|\lambda| + |\mu|)\mathrm{sgn}(\lambda)P =: \tilde{P}, (|\lambda| + |\mu|)\mathrm{sgn}(\mu)Q =: \tilde{Q}\}$$

avec poinds respectifs (qui sont bien positifs ou nuls)

$$\Lambda = \left\{\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}, \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\right\}.$$

Ainsi par présèrvation des barycentres positifs, on trouve

$$\psi(\lambda P + \mu Q) = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}\psi(\tilde{P}) + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\psi(\tilde{Q}).$$

Or par (0.1),

$$\psi(\tilde{P}) = \mathrm{sgn}(\lambda)(|\lambda| + |\mu|)\psi(P) \text{ et } \psi(\tilde{Q}) = \mathrm{sgn}(\mu)(|\lambda| + |\mu|)\psi(Q),$$

d'où le résultat.

Il nous suffit alors de prouver (0.1). La première identité s'obtient en prenant $\mathcal{P} = \{P, -P\}$ avec poids $\Lambda = \{1/2, 1/2\}$. Pour la deuxième, on prends $\mathcal{P} = \{P, 0\}$ et $\Lambda = \{\lambda, 1-\lambda\}$ si $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Si $\lambda > 1$, il suffit de choisir $\mathcal{P} = \{\lambda P, 0\}$ avec poids $\Lambda = \{1/\lambda, 1 - 1/\lambda\}$.

4. On commence juste par montrer que si $\varphi_0$ est linéaire et $t$ est une translation, alors $\varphi_0 \circ t$ est affine. En effet, si $P = t(0)$, alors

$$\varphi_0 \circ t = t_{\varphi_0(P)} \circ t_{-\varphi_0(P)} \circ \varphi_0 \circ t$$

et il est très facile de vérifier que $t_{-\varphi_0(P)} \circ \varphi_0 \circ t$ est linéaire.

Montrons maintenant que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe. On commence par la stabilité par passage à l'inversion : Soit $\varphi = t \circ \varphi_0$ une transformation affine. Alors $\varphi^{-1} = \varphi_0^{-1} \circ t^{-1}$ qui est affine par ce qui a été dit plus haut.

On montre maintenant la stabilité par produit. Si $\varphi = t \circ \varphi_0$ et $\psi = t' \circ \psi_0$ sont deux transformations affines, alors

$$\varphi \circ \psi = t \circ \varphi_0 \circ t' \circ \psi_0.$$

La partie $\varphi_0 \circ t'$ est affine, donc de la forme $t'' \circ \varphi_0'$ avec $\varphi_0'$ linéaire. Ainsi on trouve

$$\varphi \circ \psi = (t \circ t'') \circ (\varphi_0' \circ \psi_0)$$

qui est bien une transformation affine.

**Exercice 5.** 1. Soit $g = kl = k'l'$ deux écritures de $g$. Alors $l'l^{-1} = k'^{-1}k \in K \cap L = \{e_G\}$. D'où

$$l'l^{-1} = k'^{-1}k = e_G \Longrightarrow l' = l \text{ et } k = k'.$$

2. Montrons que l'application $G \to L$, $g \mapsto l_g$ est un morphisme de groupes surjectif. La surjectivité est clair. Pour montrer que c'est un morphisme, on prend $g = k_g l_g$ et $g' = k_{g'} l_{g'}$. On a ensuite

$$gg' = k_g l_g k_{g'} l_{g'} = k_g l_g k_{g'} l_g^{-1} l_g l_{g'}$$

avec $l_g k_{g'} l_g^{-1} \in K$ car $K$ est distingué dans $G$. Ceci montre que $l_{gg'} = l_g l_{g'}$. Le fait que le noyau soit $K$ est complètement évident : pour $g = k_g l_g$ on a $l_g = e_G$ si et seulement si $g \in K$.

3. A été fait au point 2.

4. Tout groupe de la forme $G \times H$ avec $G, H$ abélien est le produit semi-direct $G \ltimes H$.

5. Soient $\mathcal{T}$ le sous-groupe des translations et $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ le sous-groupe des transformations linéaires. Il est facile de voir que $\mathcal{T}\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ (par définition), que $\mathcal{T} \cap \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) = \{\mathrm{Id}\}$ et que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe distingué. Ainsi

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T} \ltimes \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2).$$