Exercice 6.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. *L'épigraphe* de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par

$$\mathrm{Epi}(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(x)\}$$

Montrer que $\mathrm{Epi}(f)$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$ est une variété à bord, de dimension $n+1$. Quel est son bord ?

Solution 6.1. Il faut construire pour tout point $(x,t) \in \mathrm{Epi}(f)$ un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{H}^{n+1}$. On va en fait construire un homéomorphisme global $\varphi : \mathrm{Epi}(f) \to \mathbb{H}^{n+1}$.
Soit donc $(x,t) \in \mathrm{Epi}(f)$. Posons $\varphi(x,t) = (x, t - f(x))$. Alors $\varphi(x) \in \mathbb{H}^{n+1}$. De plus, φ est clairement surjective et injective. Sa continuité ne fait pas de doute : elle est continue dans chaque composante (elle vaut l'identité sur la première et est une soustraction d'applications continues sur la seconde). De plus, son inverse est simplement donnée par $\varphi^{-1}(x,s) = (x, f(x)+s)$, et donc est continue également pour les mêmes raisons.

Exercice 6.2. L'espace projectif réel, noté $\mathbb{RP}^n$, est défini comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la topologie quotient déterminée par la projection naturelle

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$$

qui envoie $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur $\mathrm{Span}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On note $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ l'image dans $\mathbb{RP}^n$ de $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique.
Indication: Pour tout $1 \leq i \leq n+1$ considérer l'ensemble

$$U_i := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}.$$

Solution 6.2. Comme suggéré, considérons les ensembles $U_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dans un premier temps, montrons que les $V_i := \pi(U_i)$ sont des ouverts dans $\mathbb{RP}^n$. On a

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(V_i) &= \pi^{-1}(\{[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}) \\
&= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\} \\
&= U_i
\end{aligned}$$

qui est ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. A présent, considérons les applications suivantes

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définies par $\varphi_i([x_1, \ldots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$. L'inverse de φ_i est donné par

$$\varphi_i^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n].$$

Ainsi, φ_i est bijective. De plus, φ_i est continue car $\varphi_i \circ \pi$ et donc par propriété universelle de l'application quotient, φ_i est continue. Son inverse φ_i^{-1} est aussi continue car c'est la composition de deux fonctions continues $\varphi_i^{-1} = \pi \circ f_i$, où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est définie par $f_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. On a donc montré que $\mathbb{RP}^n$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
Le fait que $\mathbb{RP}^n$ admet une base dénombrable d'ouverts est maintenant clair. En effet, il n'y a qu'un nombre fini (en l'occurence $n+1$) de cartes (V_i, φ_i) recouvrant $\mathbb{RP}^n$ et puisque $\mathbb{R}^n$ admet une base dénombrable d'ouverts, chaque préimage $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^n)$ en admet aussi une.

Il reste à montrer que $\mathbb{RP}^n$ est de Hausdorff. On va utiliser un résultat de topologie qui dit qu'un espace topologique X est de Hausdorff si et seulement si la diagonale $X \times X$ est fermée (pour la topologie produit). Transposé au cas d'un quotient, on a

$$X/\sim \text{ est de Hausdorff } \iff \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\} \text{ est fermé dans } X \times X.$$

Dans notre cas, $x \sim y$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$. Cela se réécrit,

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n+1 \\ &\iff x_i y_j - x_j y_i, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n+1. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $f : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x_i y_j - x_j y_i$, on obtient que

$$\{(x,y) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid x \sim y\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Or, f est clairement une fonction continue, ce qui montre que $\{(x,y) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid x \sim y\}$ est fermé et donc que $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ est de Hausdorff.
L'espace projectif réel est donc une variété topologique.

Exercice 6.3. On se donne un homéomorphisme $f_0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ et on considère les deux variétés à bord

$$M_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \mid t \geq 1\} \quad \text{et} \quad M_- := \{(x,s) \in \mathbb{R}^n \mid s \leq -1\}.$$

On a alors un homéomorphisme $f : \partial M_- \to \partial M_+$ défini par $f(x,-1) = (f_0(x), 1)$. Montrer qu'on peut construire un homéomorphisme

$$F : M/f \to \mathbb{R}^n,$$

avec $M := M_+ \cup M_-$.
Indication: Faire un dessin de la situation et penser à ce que l'on veut faire: recoller deux morceaux de $\mathbb{R}^n$.

Solution 6.3. Soit $\pi : M = M_+ \cup M_- \to M/f$ la projection canonique. Tout $x \in M$ peut s'écrire comme $x = (y,t)$ avec $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$. La composante t est la "n-ème coordonnée" de x. On a $(y,t) \in \partial M_\pm$ ssi $t = \pm 1$.
Définissons alors $F : M/f \to \mathbb{R}^n$ par

$$F(\pi(y,t)) = \begin{cases} (y, t-1), & \text{si } t \geq 1, \\ (f_0(y), t+1) & \text{si } t \leq -1. \end{cases}$$

Alors, F est bien définie car si $(y,-1) \in \partial M_-$, alors

$$\pi(y,-1) = \pi(f_0(y), 1),$$

or,

$$F(\pi(y,-1)) = (f_0(y), 0) = F(\pi(f_0(y), 1)).$$

La fonction F est bijective, en effet elle admet l'inverse suivant: $F^{-1} : \mathbb{R}^n \to M/f$ définie par

$$F^{-1}(y,t) = \begin{cases} \pi(f_0^{-1}(y), t-1) & \text{si } t \leq 0, \\ \pi(y, t+1) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Il reste à montrer que F et F^{-1} sont continues. Par définition de l'application quotient, F est continue si et seulement si $F \circ \pi$ est continue. Or par le lemme de recollement (voir topologie 2-ème année), il suffit de montrer que $(F \circ \pi)|_{M_+}$ et $(F \circ \pi)|_{M_-}$ sont continues. On a

$$(F \circ \pi)|_{M_+}(y,t) = (y, t-1) \quad \text{et} \quad (F \circ \pi)|_{M_-}(y,s) = (f_0(y), s+1),$$

qui sont clairement continues, f étant un homéomorphisme. Ainsi F est continue. Pour voir que son inverse est aussi continue, remarquons que $F^{-1} = \pi \circ G$, où $G : \mathbb{R}^n \to M$ avec

$$G(y,t) = \begin{cases} (f_0^{-1}(y), t-1) & \text{si } t \leq 0, \\ (y, t+1) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

En utilisant à nouveau le lemme de recollement, il suffit de montrer que $G|_{\overline{\mathbb{H}}^n_+}$ et $G|_{\overline{\mathbb{H}}^n_-}$ sont continues, ce qui est clair car on ne fait que "translater" de ± 1 et car f_0^{-1} est continue.
Ainsi, on a montré que F est un homéomorphisme.

Exercice 6.4. Soit M une variété topologique et $N_1, N_2 \subset \partial M$ deux composantes connexes distinctes de son bord. Supposons donné un homéomorphisme $f : N_2 \to N_1$. Rappeler la définition de l'espace topologique M/f, puis utiliser l'exercice précédent pour montrer que M/f est une variété topologique.

Solution 6.4. On définit la relation d'équivalence suivante sur M:

$$p \sim q \Longleftrightarrow p = q \text{ ou } p = f(q) \text{ ou } q = f(p).$$

On note M/f l'espace M quotienté par cette relation d'équivalence et $\pi : M \to M/f$ la projection canonique. Un ensemble $U \subset M/f$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset M$ est ouvert (topologie quotient).
L'idée de cet exercice est de montrer que la situation dans une variété à bord est plus ou moins la même que le cas de l'exercice précédent. Il faut donc observer ce qu'il se passe sur les points du bord qui sont collés ensemble et décrire à quoi ressemble un voisinage localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ autour de ces points une fois qu'ils sont "collés". La stratégie consiste donc à montrer qu'au voisinage de tels points on peut construire des ouverts qui ressemblent aux M_+ et M_- de l'exercice précédent. Il est important de garder cette construction géométrique à l'esprit pour ne pas se perdre dans les détails techniques de la preuve (en faisant par exemple beaucoup de dessins de la situation).
Par de la topologie standard de 2ème année, on montre facilement que M/f est à base dénombrable et de Hausdorff. Il reste à montrer que M/f est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Alors soit $p \in M/f$. Si $p \in \pi(M \setminus (N_1 \cup N_2))$, c'est clair. Supposons donc que p est de la forme $\pi(x) = \pi(f(x))$ avec $x \in N_2$. Il faut construire une carte locale appropriée. On sait qu'il existe des carte locales dans M autour de $f(x)$ et x

$$\varphi : U \to \overline{\mathbb{H}}^n \text{ et } \psi : V \to \overline{\mathbb{H}}^n.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varphi(f(x)) = \psi(x) = 0$. Soit alors $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que la boule $\tilde{V} := B_0(\epsilon) \subset \overline{\mathbb{H}}^n$ satisfasse

$$f \circ \psi^{-1}(\tilde{V} \cap \overline{\mathbb{H}}^n) \subset U.$$

On pose alors $g := \varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \partial\overline{\mathbb{H}}^n \to \partial\overline{\mathbb{H}}^n$ et soit $\hat{g} : \overline{\mathbb{H}}^n \to \overline{\mathbb{H}}^n$ son extension, définie par

$$\hat{g}(x,t) = (g(x), t).$$

Alors, si $\tilde{U} = \hat{g}(\tilde{V})$, on a que $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont tout deux homéomorphes à $\overline{\mathbb{H}}^n$ et $g : \partial\tilde{V} \to \partial\tilde{U}$ est un homéomorphisme. On peut alors utiliser l'exercice précédent, (en faisant l'analogie $M_+ \cong \tilde{U}$ et $M_- \cong \tilde{V}$) pour dire qu'il existe un homéomorphisme

$$(\tilde{U} \cup \tilde{V})/g \cong \mathbb{R}^n.$$

On note $\tilde{\pi} : \tilde{U} \cup \tilde{V} \to (\tilde{U} \cup \tilde{V})/g \cong \mathbb{R}^n$ l'application quotient. On est finalement en mesure de décrire la carte locale recherchée. Posons $W := \pi\left(\varphi^{-1}(\tilde{U}) \cup \psi^{-1}(\tilde{V})\right)$ et définissons $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi(\pi(x)) = \begin{cases} \tilde{\pi} \circ \varphi(x) & \text{si } x \in \varphi^{-1}(\tilde{U}), \\ \tilde{\pi} \circ \psi(x) & \text{si } x \in \psi^{-1}(\tilde{V}). \end{cases}$$

On vérifie de la même manière que dans l'exerice précédent que φ est un homéomorphisme.

Exercice 6.5. Montrer que la sphère $\mathbb{S}^n$ est un élément neutre pour la somme connexe. Plus précisément, si M est une variété topologique de dimension n, montrer que $M\#\mathbb{S}^n \cong M$.

Solution 6.5. Soient $\mathbb{D}^n$ le disque unité (ouvert) dans $\mathbb{R}^n$, $D_M \subset M$ l'image par un homéomorphisme de $\mathbb{D}^n$ dans M, et D_S l'image par un homéomorphisme de $\mathbb{D}^n$ dans $\mathbb{S}^n$.
Il est clair que $\mathbb{S}^n \setminus D_S$ est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}^n$. Ainsi

$$M\#\mathbb{S}^n = [(M \setminus D_M) \sqcup (S^n \setminus D_S)] / \sim = [(M \setminus D_M) \sqcup D_M] / \sim = M.$$

Exercice 6.6. Déterminer l'espace topologique $\mathbb{RP}^2 \setminus D$, où D est un disque.

Solution 6.6. On peut voir le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ comme la sphère $\mathbb{S}^2$ quotientée par la relation d'équivalence $x \sim -x$, i.e. on identifie les points antipodaux. On a alors la figure 1 (voir fin du document).

Exercice 6.7. Dans cet exercice, on construit un atlas de la sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ à l'aide de la projection stéréographique.
Considérons le pôle nord de la sphère $e_{n+1} \equiv (0, \cdots, 0, 1)$, et posons E le complément orthogonal du vecteur $\vec{e}_{n+1}$, i.e., l'hyperplan défini par l'équation $x_{n+1} = 0$. Soit $\varphi : \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \to E$ la projection centrale à travers e_{n+1}. En particulier, pour $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$, le point $\varphi(x)$ est l'intersection entre E et le segment joignant e_{n+1} et x.

(a) Est-il possible de recouvrir $\mathbb{S}^n$ avec une seule carte?

(b) Trouver une expression explicite pour φ. En particulier, étant donné $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, trouver explicitement les coordonnées de $\varphi(x) \in E$.

(c) Quel est le domaine de φ? Et quelle est son image?

(d) Montrer que φ est un homéomorphisme.

(e) Trouver un atlas pour $\mathbb{S}^n$.

Solution 6.7. By Thales theorem, it is easy to realize that

$$\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \cdots, x_n) \ .$$

Note that this function is a smooth function on the set $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_{n+1} = 0\}$, thus, by restriction, it is also a continuous function on S^n minus the north pole.
The domain of φ is evidently $S^n \setminus \{e_{n+1}\}$, and its image is the whole set E.
In order to prove that φ is injective and its inverse is continuous, we explicitly write the function $\varphi^{-1} : E \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$.
Let $p \in E$ be a generic point, and consider the equation

$$p = (p_1, \cdots, pu_n) = \varphi(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \cdots, x_n) \, .$$

Since $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2 = (1 - x_{n+1})(1 + x_{n+1})$, we obtain

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}} \, .$$

By inverting this equation, we get:

$$x_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^n p_i^2 + 1} = \frac{|p|^2 - 1}{|p|^2 + 1} \, .$$

As for the other coordinates, it is clear that $(x_1, \cdots, x_n) = c(p_1, \cdots, p_n)$, where c is chosen in such a way that $|x|^2 = 1$.
Thus we obtain the equation

$$|x|^2 = c^2 |p|^2 + \left(\frac{|p|^2 - 1}{|p|^2 + 1} \right)^2 = 1 \,,$$

which in turn yields to

$$c = \frac{2}{|p|^2 + 1} \,.$$

Thus

$$\varphi^{-1}(p_1, \cdots, p_n) = \frac{2}{|p|^2 + 1} \left(p_1, \cdots, p_n, \frac{|p|^2 - 1}{2} \right) \,.$$

Since φ^{-1} is well defined, and evidently continuous, we have proved that φ is a homeomorphism.
In order to have an atlas for the sphere, we just need to find a local chart centered at e_{n+1}. The stereographic projection with respect to the south pole $-e_{n+1} = (0, \cdots, 0, -1)$ is enough.

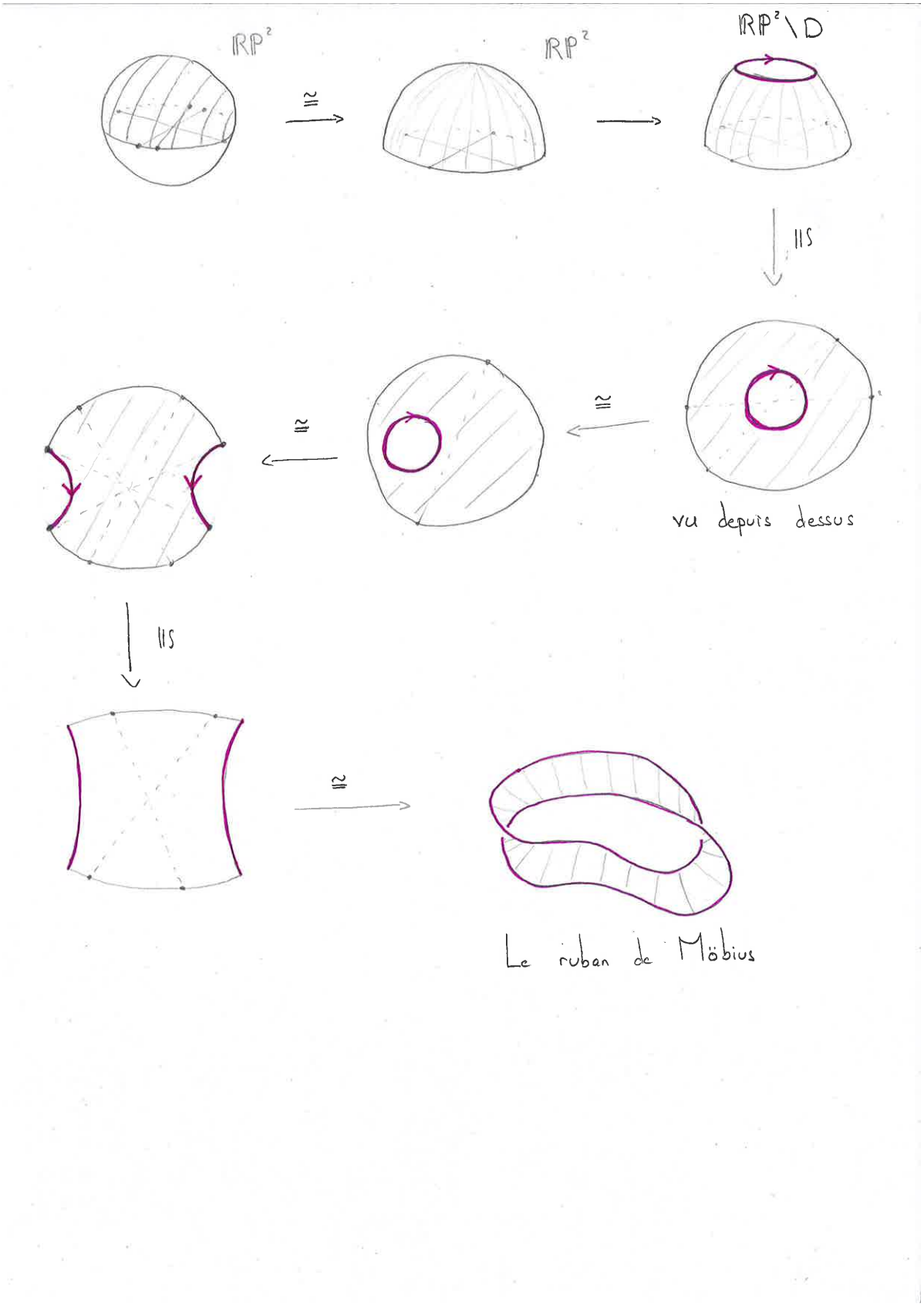

Figure 1: Le ruban de Möbius construit à partir du plan projectif auquel on a enlevé un disque ouvert.