| | |
|---|---|
| EPFL - Automne 2017 | M. Troyanov |
| **Introduction aux Variétés Différentiables** | **Exercices** |
| Série 8 | 09 novembre |

**Exercice 8.1.** Trouver deux structures différentiables sur $\mathbb{R}$ qui ne soient pas équivalentes.

**Exercice 8.2. (Théorème du plongement de Whitney pour une variété compacte)**
Montrer que si $M$ est une variété différentiable compacte de dimension $n$, alors il existe une application $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ différentiable, pour un certain $N \in \mathbb{N}$, qui soit un homéomorphisme sur son image (nous verrons plus tard qu'il s'agit même d'un difféomorphisme).
*Indication:* Utiliser l'exercice 7.2.

**Exercice 8.3.** Une variété différentiable *complexe* est une variété munie d'un atlas de cartes à valeur dans $\mathbb{C}^n$ et dont les applications de changements de cartes sont *biholomorphes* (holomorphes avec inverse holomorphe). Existe-il un analogue du théorème du plongement de Whitney pour une variété complexe $M$ compacte et connexe?

**Exercice 8.4.** Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$ et soit $G$ le groupe des difféomorphismes de $M$. Montrer que $G$ agit transitivement sur $M$, i.e. que pour toute paire de points $p, q \in M$, il existe un difféomorphisme $f : M \to M$ tel que $f(p) = q$.
*Indication:* Supposer d'abord que les deux points sont dans un même ouvert de carte. Pour le cas général, considérer une courbe $\gamma : [0,1] \to M$ reliant $p$ à $q$ et une subdivision $t_0 = 0 < \ldots < t_k = 1$ suffisamment fine de $[0,1]$ de sorte que $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ appartiennent à un même ouvert de carte pour tout $i = 0, \ldots, k-1$.