Exercice 8.1. Trouver deux structures différentiables sur $\mathbb{R}$ qui ne soient pas équivalentes.

Solution 8.1. Considérer $\mathbb{R}$ muni une fois de l'atlas à une seule carte $(\mathbb{R}, \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ et une fois de l'atlas composé de la carte $(\mathbb{R}, \psi)$, avec $\psi(x) = x^3$. On a alors que $\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ qui *n'est pas* différentiable en 0. Observons que les deux variétés sont cependant difféomorphes.

Exercice 8.2. (Théorème du plongement de Whitney pour une variété compacte)
Montrer que si M est une variété différentiable compacte de dimension n, alors il existe une application $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ différentiable, pour un certain $N \in \mathbb{N}$, qui soit un homéomorphisme sur son image (nous verrons plus tard qu'il s'agit même d'un difféomorphisme).
Indication: Utiliser l'exercice 7.2.

Solution 8.2. Par l'exercice 7.2, on sait que pour tout point $p \in M$, il existe des ouverts $V \subset U \subset M$ autour de p ainsi qu'une application différentiable $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ surjective telle que $f|_V$ est un difféomorphisme sur son image. De plus, on rappelle que par construction de cette application on a $f(V) = B(0,1)$ et $f(M \setminus V) = \hat{\mathbb{R}}^n \setminus B(0,1)$. Comme M est compacte, il existe un nombre fini d'ouverts $V_1, \ldots, V_k$ tels que $\bigcup_{i=1}^k V_i = M$. Notons $f_i : M \to \mathbb{S}^n$ les applications correspondantes et posons

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) .$$

L'image de cette application est $F(M) = \mathbb{S}^n \times \ldots \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{k(n+1)}$. Comme chacun des f_i est lisse, F l'est aussi. Il reste donc à voir que F est injective. Soient donc $x, y \in M$ tels que $F(x) = F(y)$. Alors deux cas sont possibles:

(1) si $x, y \in V_i$ pour un certain i, alors $f_i(x) = f_i(y) \Rightarrow x = y$ puisque f_i est un difféomorphisme sur V_i;

(2) si $x \in V_i$ et $y \notin V_i$, alors comme $f_i(x) \in B(0,1)$ et $f_i(y) \in \hat{\mathbb{R}}^n \setminus B(0,1)$, on a $f_i(x) \neq f_i(y)$ et donc $F(x) \neq F(y)$ ce qui est une contradiction.

Ainsi F est bijective et continue. Mais comme M est compacte, il suit que F est un homéomorphisme sur son image.

Exercice 8.3. Une variété différentiable *complexe* est une variété munie d'un atlas de cartes à valeur dans $\mathbb{C}^n$ et dont les applications de changements de cartes sont *biholomorphes* (holomorphes avec inverse holomorphe). Existe-il un analogue du théorème du plongement de Whitney pour une variété complexe M compacte et connexe?

Solution 8.3. La réponse est non à cause du théorème de Liouville. En effet, comme M est compacte, son image par F est compacte dans $\mathbb{C}^N$ et donc en particulier bornée, toutes les fonctions holomorphes sur M sont constantes.

Exercice 8.4. Soit M une variété différentiable de dimension n et soit G le groupe des difféomorphismes de M. Montrer que G agit transitivement sur M, i.e. que pour toute paire de points $p, q \in M$, il existe un difféomorphisme $f : M \to M$ tel que $f(p) = q$.
Indication: Supposer d'abord que les deux points sont dans un même ouvert de carte. Pour le cas général, considérer une courbe $\gamma : [0,1] \to M$ reliant p à q et une subdivision $t_0 = 0 < \ldots < t_k = 1$ suffisamment fine de $[0,1]$ de sorte que $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ appartiennent à un même ouvert de carte pour tout $i = 0, \ldots, k-1$.

Solution 8.4. On commence par supposer que les points p et q sont suffisamment proches, c'est-à-dire qu'il existe une carte (U, φ) telle que $p, q \in U$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varphi(U) = B(0,3)$, que $\varphi(p) = (-1, 0, \ldots, 0)$ et que $\varphi(q) = (1, 0, \ldots, 0)$. Soit une fonction plateau $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

(i) $\eta(x) = 1$ si $|x| \leq 1$,

(ii) $\eta(x) = 0$ si $|x| \geq 2$,

(iii) $\eta'(x) < 0$ si $1 < |x| < 2$.

On construit alors un difféomorphisme $\tilde{f} : B(0,3) \to B(0,3)$ en posant,

$$\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} x^1 \cos(\eta(r)\pi) + x^2 \sin(\eta(r)\pi) \\ -x^1 \sin(\eta(r)\pi) + x^2 \cos(\eta(r)\pi) \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

avec $r = \|x\|$. Cette application dépend de la distance à l'origine via le facteur $\eta(r)$, ainsi on a en particulier

(a) si $x \in B(0,1)$ alors $\tilde{f}(x) = (-x^1, -x^2, x^3, \ldots, x^n)$ et donc $\tilde{f}(\varphi(p)) = \varphi(q)$,

(b) si $x \notin B(0,2)$ alors $\tilde{f}(x) = x$,

(c) si $1 < \|x\| < 2$ alors l'amplitude de la rotation décroît de π jusqu'à 0.

En tant que composition de difféomorphismes, $\tilde{f}$ est un difféomorphisme de $B(0,3)$. On définit alors le difféomorphisme recherché $f : M \to M$ par

$$f(x) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi(x) & \text{si } x \in U \\ x & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

Pour le cas général, on considère comme dans l'indication une courbe $\gamma : [0,1] \to M$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$ et on partitionne l'intervalle $[0,1]$ en k sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de sorte que pour toute paire de points $p_i := \gamma(t_i)$ et $p_{i+1} := \gamma(t_{i+1})$ il existe une carte (U_i, φ_i) telle que $p_i, p_{i+1} \in U_i$. On applique alors la première partie de l'exercice pour trouver un difféomorphisme f_i qui envoie p_i sur p_{i+1} et finalement on pose

$$f := f_k \circ \ldots \circ f_0 : M \longrightarrow M$$

qui est bien un difféomorphisme envoyant p sur q.