Exercice 9.1. (a) Soient $n+1$ polynômes homogènes de degrés d à $m+1$ variables $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x_0, ..., x_m]$. Supposons que les f_i n'on aucun zéro communs autre que $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Montrer que l'application

$$F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto (f_0(x), \dots, f_n(x))$$

induit une application différentiable bien définie de $\overline{F} : \mathbb{RP}^m \to \mathbb{RP}^n$.

(b) La procédure ci-dessus permet-elle de construire des applications holomorphes non constantes de $\mathbb{CP}^m$ dans $\mathbb{CP}^n$?

(c) Construire un exemple d'application différentiable *non polynomiale* (en particulier non constante) de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{RP}^2$.

Solution 9.1. (a) Il faut montrer que si $x, y \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ sont tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$, alors $\overline{F}([x]) = \overline{F}([y])$, où les crochets désigne la classe d'équivalence d'un élément dans le quotient. Or, on a

$$\begin{aligned}
\overline{F}([x]) &= [f_0(x) : \dots : f_n(x)] \\
&= [f_0(\lambda y) : \dots : f_n(\lambda y)] \\
&= [\lambda^d f_0(y) : \dots : \lambda^d f_n(y)] \\
&= [f_0(y) : \dots : f_n(y)] = \overline{F}([y]).
\end{aligned}$$

Pour voir que $\overline{F}$ est différentiable, on regarde dans les cartes standards de $\mathbb{RP}^m$ et $\mathbb{RP}^n$ (c.f. exercice 6.2). Notons (U_i, φ_i) les cartes standards de $\mathbb{RP}^m$ et (V_j, ψ_j) celles de $\mathbb{RP}^n$. On doit voir que

$$\psi_j \circ \overline{F} \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\overline{F}^{-1}(V_j) \cap U_i) \to \psi_j(V_j)$$

est différentiable. Si $x = (x_1, \dots, x_m) \in \varphi_i(\overline{F}^{-1}(V_j) \cap U_i)$, alors

$$\varphi_i^{-1}(x) = [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_m] =: x'$$

et ensuite, comme $\overline{F}(x') \in V_j$ on a $f_j(x') \neq 0$ et donc

$$(\psi_j \circ \overline{F})(x') = \left(\frac{f_0(x')}{f_j(x')}, \dots, \frac{f_{j-1}(x')}{f_j(x')}, \frac{f_{j+1}(x')}{f_j(x')}, \dots, \frac{f_n(x')}{f_j(x')} \right)$$

qui est bien différentiable puisque les polynômes sont différentiables et que $f_j(x') \neq 0$ pour tout $x \in \varphi_i(\overline{F}^{-1}(V_j) \cap U_i)$.

(b) La réponse est oui. La même construction fonctionne dans le cas complexe.

(c) L'application $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ définie par

$$F(x, y, z) = \left(x \sin \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right), y, z \right)$$

induit bien une application différentiable non polynomiale sur $\mathbb{RP}^2$.

Exercice 9.2. On considère l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

(a) Ecrire la matrice Jacobienne de F.

(b) Pour quelles valeurs de (x, y, z) a-t-on $\text{rang}(F) < 3$.

(c) On note $f = F|_{S^2}$ la restriction de F à la sphère unité. Montrer que $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ est une immersion.

(d) Prouver qu'on peut construire à partir de f un plongement $\bar{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$.

Solution 9.2. (a) On a

$$dF = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

(b) $\text{rang}(F) < 3$ pour $x = y = 0$. En effet, Si $x = 0$, alors on a deux cas:

$$\text{si } y \neq 0, \text{ alors } dF = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \quad \text{est de rang 3 quel que soit } z,$$

$$\text{si } y = 0, \text{ alors } dF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{est de rang} < 3 \text{ quel que soit } z.$$

Si $x \neq 0$, alors le rang vaut toujours 3 comme on peut s'en convaincre en calculant les quatre mineurs 3×3 de dF.

(c) Soit $p \in \mathbb{S}^2$.Il faut montrer que la restriction de dF_p au sous-espace vectoriel $T_p\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, p \rangle = 0\}$ pour tout $p \in \mathbb{S}^2$ est de rang 2. On peut montrer par exemple que df_p est injective.

(d) D'abord observer que $f(p) = f(-p)$. Donc $\bar{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ est bien définie. Ensuite $\bar{f}$ est injective ($\Leftrightarrow \bar{f}(p) = \bar{f}(q)$ ssi $p = \pm q$). Puis rappeler qu'une immersion injective d'une variété compacte est un plongement (c.f. exercice 9.4).

Exercice 9.3. Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés différentiables qui soit une immersion. Prouver que si f est un homéomorphisme, alors f est un difféomorphisme.

Solution 9.3. On veut montrer que l'inverse f^{-1} est aussi différentiable. Comme la différentielle est injective en tout point de M elle est aussi inversible (puisque $\dim M = \dim N$) et on peut appliquer le théorème d'inversion locale qui implique que l'inverse est aussi différentiable.

Exercice 9.4. Soit $f : M \to N$, une application C^∞ entre deux variétés différentiables. Montrer que f est un plongement si et seulement si f est une immersion injective propre.
Indication: On pourra tout d'abord montrer que si X est un espace topologique et Y un espace topologique de Hausdorff et localement compact, alors toute application continue propre $F : X \to Y$ est fermée.

Solution 9.4. Supposons que f soit un plongement, c'est-à-dire que f est une immersion et un homéomorphisme sur son image. Alors f est clairement une immersion injective. De plus, f^{-1} est continue et donc l'image par d'un compact par f^{-1} est compacte, ce qui montre que f est propre.
A l'inverse, supposons que f soit une immersion injective propre. Par l'indication, on sait que f est fermée puisque M et N sont des variétés donc en particulier des espaces topologiques de Hausdorff et localement compacts. Or, comme f est bijective on a

$$f \quad \text{est fermée} \iff f \quad \text{est ouverte.}$$

ce qui implique que f est un homéomorphisme sur son image.
Concernant l'indication: Pour montrer l'indication, considérons $K \subseteq X$ un sous-ensemble fermé. Pour montrer que $F(K)$ est fermé dans Y, on montre qu'il contient tous ses points limites. Soit y un point limite de $F(K)$ et soit U un voisinage précompact de y (existe puisque Y est localement compact). Alors, y est aussi un point limite de $F(K) \cap \overline{U}$. Puisque F est propre, $F^{-1}(\overline{U})$ est compact, ce qui implique que $K \cap F^{-1}(\overline{U})$ est compact. Comme F est aussi continue,

$$F(K \cap F^{-1}(\overline{U})) = F(K) \cap \overline{U}$$

est compact et donc fermé dans Y. En particulier, $y \in F(K) \cap \overline{U} \subseteq F(K)$, donc $F(K)$ est fermé.

Exercice 9.5. Rappeler la structure différentiable sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que tout polynôme $p(z)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ s'étend en une application différentiable $\tilde{p} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Solution 9.5. Si le polynôme p est constant, alors il suffit de le prolonger par cette même valeur en ∞. Supposons donc que $p(z) = a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_d \neq 0$ n'est pas constant et posons $\tilde{p}(\infty) = \infty$. Il faut vérifier que $\tilde{p}$ est différentiable, on regarde donc dans les cartes standards de $\hat{\mathbb{C}}$. Rappelons que ces cartes sont données par

$$(\mathbb{C}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \quad \text{et} \quad \left(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \varphi(z) = \frac{1}{z}\right).$$

La première carte implique la différentiabilité en tout point de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ puisque p est différentiable. Dans la deuxième carte, on a

$$\varphi \circ \tilde{p} \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{\tilde{p}(\frac{1}{z})} = \frac{z^d}{a_d + a_{d-1}z + \ldots + a_1 z^{d-1} + a_0 z^d}$$

qui est différentiable au voisinage de $0 = \varphi(\infty)$ puisque $d > 0$ et $a_d \neq 0$.

Exercice 9.6. On considère l'ensemble de toute les applications $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ définies par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ si $c \neq 0$, et avec $f(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

(a) Montrer que ces applications sont bien définies et différentiables.

(b) Montrer qu'une telle application est un difféomorphisme si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

(c) (Facultatif) Montrer que l'ensemble des applications ci-dessus vérifiant $ad - bc \neq 0$ forme un groupe pour la composition. Ce groupe est appelé *groupe de Möbius*, noté $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ et ses éléments sont appelés des *transformations de Möbius*.

(d) (Facultatif) Montrer que $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, où

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}.$$

Ce groupe joue un rôle important en géométrie, notamment en géométrie hyperbolique. En fait, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ constitue le groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.

Solution 9.6. (a) On considère les cartes standards sur $\hat{\mathbb{C}}$:

$$\varphi : U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = z,$$

et

$$\psi : V = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad \psi(z) = \frac{1}{z},$$

avec la convention usuelle que $\psi(\infty) = 0$. Alors, on a d'une part

$$f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

qui est holomorphe, et d'autre part

$$f \circ \psi^{-1} : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \left\{\frac{b}{d}\right\}, \quad z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{bz+a}{dz+c}$$

qui est aussi holomorphe.

(b) Supposons maintenant que f soit un difféomorphisme. Alors en particulier, f est bijective. Or, en supposant par l'absurde que $ad = bc$, on a

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad}{c}}{cz+d} + \frac{b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

qui n'est certainement pas bijective, d'où une contradiction.

A l'inverse, supposons que $ad - bc \neq 0$. Alors on calcule l'inverse de f explicitement:

$$f(z) = w \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = w \Leftrightarrow z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Ainsi, on définit $f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ qui est différentiable par le même argument que ci-dessus puisque f^{-1} est de la même forme que f (i.e. un quotient de fonctions holomorphes dans les cartes).

(c) L'identité est obtenue en posant $a = d = 1$ et $b = c = 0$. Pour l'inverse, on a par le point précédent

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Finalement, il n'est pas difficile de voir que la composition de deux transformations de Möbius reste une transformation de Möbius.