EPFL - Automne 2017	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	**Exercices**
Série 9	16 novembre

Exercice 9.1. (a) Soient $n+1$ polynômes homogènes de degrés d à $m+1$ variables $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x_0, ..., x_m]$. Supposons que les f_i n'on aucun zéro communs autre que $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Montrer que l'application

$$F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto (f_0(x), \ldots, f_n(x))$$

induit une application différentiable bien définie de $\overline{F} : \mathbb{RP}^m \to \mathbb{RP}^n$.

(b) La procédure ci-dessus permet-elle de construire des applications holomorphes non constantes de $\mathbb{CP}^m$ dans $\mathbb{CP}^n$?

(c) Construire un exemple d'application différentiable *non polynomiale* (en particulier non constante) de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{RP}^2$.

Exercice 9.2. On considère l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

(a) Ecrire la matrice Jacobienne de F.

(b) Pour quelles valeurs de (x, y, z) a-t-on $\operatorname{rang}(F) < 3$.

(c) On note $f = F|_{S^2}$ la restriction de F à la sphère unité. Montrer que $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ est une immersion.

(d) Prouver qu'on peut construire à partir de f un plongement $\bar{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$.

Exercice 9.3. Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés différentiables qui soit une immersion. Prouver que si f est un homéomorphisme, alors f est un difféomorphisme.

Exercice 9.4. Soit $f : M \to N$, une application C^∞ entre deux variétés différentiables. Montrer que f est un plongement si et seulement si f est une immersion injective propre.
Indication: On pourra tout d'abord montrer que si X est un espace topologique et Y un espace topologique de Hausdorff et localement compact, alors toute application continue propre $F : X \to Y$ est fermée.

Exercice 9.5. Rappeler la structure différentiable sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que tout polynôme $p(z)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ s'étend en une application différentiable $\tilde{p} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Exercice 9.6. On considère l'ensemble de toute les applications $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ définies par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ si $c \neq 0$, et avec $f(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

(a) Montrer que ces applications sont bien définies et différentiables.

(b) Montrer qu'une telle application est un difféomorphisme si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

(c) (Facultatif) Montrer que l'ensemble des applications ci-dessus vérifiant $ad-bc \neq 0$ forme un groupe pour la composition. Ce groupe est appelé *groupe de Möbius*, noté $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ et ses éléments sont appelés des *transformations de Möbius*.

(d) (Facultatif) Montrer que $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, où

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}.$$

Ce groupe joue un rôle important en géométrie, notamment en géométrie hyperbolique. En fait, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ constitue le groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.