EPFL - Automne 2017	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	**Exercices**
Série 10	23 novembre

Exercice 10.1. Montrer que sur une variété différentiable M, il existe une fonction $f\colon M \to \mathbb{R}$ qui est C^∞ et *propre* (c'est-à-dire que l'image inverse de tout compact est compacte).

Exercice 10.2. (Théorème de Urysohn C^∞)
Soient M une variété différentiable et $F_0, F_1 \subset M$ deux sous-ensembles fermés disjoints. Montrer qu'il existe une application différentiable $f : M \to [0,1]$ telle que $f|_{F_0} = 0$ et $f|_{F_1} = 1$.

Exercice 10.3. (a) Soient $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Soient aussi les fonctions suivantes $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = y$. Montrer que XY n'est pas une dérivation de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(b) Soit M une variété différentiable et X, Y deux champs de vecteurs C^∞ sur M. Montrer que le crochet de Lie de $[X,Y]$ définit un champ de vecteurs C^∞ sur M.

(c) Si les expressions de X et Y (dans un certain système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$) sont $X = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, trouver l'expression en coordonnées de $[X,Y]$.

(d) Déduire du point précédent que
$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv 0,$$
pour tout champs de vecteurs de coordonnées.

(e) Montrer les propriétés suivantes du crochet de Lie:

(i) **Bilinéarité:** pour $a, b \in \mathbb{R}$:
$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y].$$

(ii) **Antisymétrie:**
$$[X,Y] = -[Y,X].$$

(iii) **Identité de Jacobi:**
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

(iv) Pour $f, g \in C^\infty(M)$:
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

(f) Pour les champs de vecteurs X, Y suivants définis sur $\mathbb{R}^3$, calculer leur crochet de Lie $[X,Y]$.

(i) $X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$;

(ii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$;

(iii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$;

Exercice 10.4. Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) muni d'une application bilinéaire (notée $[\cdot,\cdot]$) antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

(a) Montrer qu'à toute algèbre $\mathcal{A}$ est associée une algèbre de Lie $(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$ où le crochet est défini par $[A,B] := AB - BA$.

(b) En particulier $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie (où $[A, B] := AB - BA$). Montrer que l'ensemble $\mathfrak{so}_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des $n \times n$ matrices antisymétriques est une sous-algèbre de Lie et calculer sa dimension.

(c) Montrer que $(\mathbb{R}^3, \times)$ (où $\times$ désigne le produit vectoriel) est une algèbre de Lie et qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$.

Exercice 10.5. Notons $\mathfrak{g}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de

$$X := y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y := z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z := x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Montrer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et trouver sa dimension. Puis montrer qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de l'exercice précédent.

Exercice 10.6. Soit $f\colon M \to N$ une fonction lisse entre deux variétés. Deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(M)$, $Y \in \Gamma(N)$ sont dits *f-reliés* si $df_p(X_p) = Y_{f(p)}$ pour tout $p \in M$.

(a) Montrer que deux champs de vecteurs sont f-reliés si et seulement si, pour toute fonction lisse $g \in C^\infty(N)$,

$$Y(g) \circ f = X(g \circ f).$$

(b) En déduire que si X_i et Y_i sont f-reliés ($i = 1, 2$), alors les crochets $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ sont f-reliés.

Exercice 10.7. Trouver un champ de vecteurs tangent partout non nul sur $\mathbb{S}^{2n+1}$ (il est en revanche impossible d'avoir un tel champ en dimension paire).
Indication. On peut voir la sphère comme une sous-variété plongée dans $\mathbb{R}^{2n+2}$, il suffit donc de trouver une application lisse (partout non nulle) $F : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ telle que $\langle x, F(x)\rangle = 0$.

Exercice 10.8. Montrer que si M et N sont deux variétés différentiables, alors le fibré tangent du produit $T(M \times N)$ est difféomorphe à $TM \times TN$.