EPFL - Automne 2017	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	**Solution Exercices**
Série 11	30 novembre

Exercice 11.1. Soit M une variété différentiable de dimension n. Un *repère mobile* sur un ouvert $U \subset M$ est un n-tuple de champs de vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ tel qu'en chaque point $p \in U$ la liste $(X_1|_p, \dots, X_n|_p)$ forme une base de T_pM. On dit qu'un repère mobile est *global* si $U = M$.

(a) Trouver un repère mobile global sur $\mathbb{S}^1$. En déduire un repère mobile global sur le tore $\mathbb{T}^n$.

(b) On dit qu'une variété différentiable M est *parallélisable* si son fibré tangent est trivial. Cette condition signifie qu'il existe un difféomorphisme $\Psi : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ qui commute avec les projections et dont la restriction à chaque fibre est une application linéaire $\Psi_p : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$.

Montrer que M est parallélisable si et seulement s'il existe un repère mobile global sur M.

Remarque. Observons que ce résultat peut s'énoncer en disant que M est parallélisable si et seulement s'il existe n champs de vecteurs qui sont linéairement indépendants en chaque point de M. Malgré la simplicité de cette notion, il n'est pas si facile de prouver qu'une variété est non parallélisable, l'exemple le plus simple est la sphère $\mathbb{S}^2$ (et plus généralement les sphères de dimensions paires $\mathbb{S}^{2m}$). On montre en fait que tout champ de vecteur sur $\mathbb{S}^{2m}$ s'annule au moins en un point, les preuves classiques utilisent des techniques de topologie algébrique. En dimension 2, la seule surface compacte sans bord parallélisable est le tore $\mathbb{T}^2$.

Exercice 11.2. Un *groupe de Lie* est une variété différentiable G qui est aussi un groupe au sens algébrique et tel que la multiplication et l'inversion sont lisses. Etant donnés deux groupes de Lie G et H, un homomorphisme de groupes de Lie $F : G \to H$ est un homomorphisme de groupes qui est différentiable. Un isomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme de groupes de Lie qui est un difféomorphisme.

(a) Montrer que si une variété différentiable G est munie d'une structure de groupe telle que l'application $G \times G \to G$ définie par $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ est lisse, alors G est un groupe de Lie.

(b) Montrer que les applications de multiplication à gauche et à droite, i.e. les applications

$$L_g : G \to G, \quad L_g(h) = gh \quad \text{et} \quad R_g : G \to G, \quad R_g(h) = hg$$

sont différentiables.

(c) Montrer que les variétés différentiables suivantes sont des groupes de Lie

(i) $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition; $\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication; $\mathbb{S}^1$ muni de la multiplication complexe;

(ii) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ munis de la multiplication matricielle;

(d) Trouver un homomorphisme de groupes de Lie entre les groupes de Lie $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Montrer ensuite que l'application $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $\pi(t) = e^{2\pi i t}$ est un homomorphisme de groupes de Lie.

(e) Montrer que tout homomorphisme de groupe de Lie est de rang constant.

Exercice 11.3. Soit G un groupe de Lie. Un champ de vecteur X sur G est dit *invariant à gauche* si $d(L_g)_h(X_h) = X_{gh}$ pour tout $g, h \in G$.

(a) Montrer que si $X, Y \in \Gamma(M)$ sont deux champs de vecteurs sur G invariants à gauche, alors $[X, Y]$ est invariant à gauche. L'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à gauche forme donc une algèbre de Lie, appelée *algèbre de Lie de G* et notée $\mathrm{Lie}(G)$.

(b) Montrer que l'application suivante

$$\alpha : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow T_eG, \quad \alpha(X) = X_e$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) Montrer que tout groupe de Lie est parallélisable.

Exercice 11.4. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

(a) Montrer que le groupe spécial unitaire de degré 2:

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = I, \quad \det(A) = 1\}$$

est un groupe de Lie. Déterminer une base de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

(b) Montrer que $\mathbb{S}^3$ est difféomorphe au groupe SU(2) via l'application $f : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \to \mathrm{SU}(2)$ donnée par

$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{pmatrix}$$

(c) En déduire que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

Exercice 11.5. (Facultatif)
On présente ici une autre façon de montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable. Soit $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions. On note $S \subset \mathbb{H}$ le groupe des quaternions de norme 1.

(a) Montrer que si $p \in \mathbb{H}$ est imaginaire pur, alors $qp \in T_qS$ pour tout $q \in S$ (on a identifié l'espace tangent à $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{H}$ lui-même).

(b) On considère les trois champs de vecteurs sur $\mathbb{H}$ suivants:

$$X_q = qi, \quad Y_q = qj, \quad Z_q = qk.$$

Montrer que la restriction de ces trois champs de vecteurs à S forme un repère mobile global invariant à gauche. En déduire que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

En effectuant un raisonnement similaire sur les octonions $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, on peut montrer que $\mathbb{S}^7$ est aussi parallélisable.

Remarque. Pour qu'une variété admette une structure de groupe de Lie, il faut que cette variété soit parallélisable. Cette condition est nécessaire mais non suffisante : les travaux de Bott etc. dans les années 1950 ont montré que $\mathbb{S}^n$ est parallélisable si et seulement si $n = 0, 1, 3, 7$ mais que seules $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ admettent des structures de groupes de Lie.
Ce problème est relié à celui des structures de corps sur $\mathbb{R}^n$. Il n'est pas difficile de montrer que si $\mathbb{R}^n$ admet une structure de corps (gauche), alors $\mathbb{S}^{n-1}$ admet une structure de groupe de Lie. Par conséquent les seules dimensions pour lesquelles $\mathbb{R}^n$ est un corps sont $n = 1, 2$ et 4. Le cas $n = 8$ est un cas spécial, $\mathbb{R}^8$ n'admet pas de structure de corps mais il y a une structure d'algèbre non associative, sans diviseurs de zéro, sur $\mathbb{R}^8$, ce sont les *Octonions* (ou *Octaves de Cayley*).