EPFL - Automne 2017	M. Troyanov
Introduction aux Variétés Différentiables	**Solution Exercices**
Série 10	23 novembre

Exercice 10.1. Montrer que sur une variété différentiable M, il existe une fonction $f\colon M \to \mathbb{R}$ qui est C^∞ et *propre* (c'est-à-dire que l'image inverse de tout compact est compacte).

Solution 10.1. Soit $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un atlas dénombrable et localement fini de M. Soit également $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de l'unité dont les supports sont compacts et tels que $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset U_i$. Soit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} j\varphi_j(x).$$

Notons que cette somme est finie pour tout x, puisque chaque x dans M possède un voisinage qui n'intersecte qu'un nombre fini des U_j et donc qu'un nombre fini des $\mathrm{supp}(\varphi_j)$. Cette fonction est donc bien définie, et elle est lisse puisque tout x possède un voisinage dans lequel elle est une somme finie de fonctions lisses. L'ensemble $f^{-1}([-k,k]) = f^{-1}([0,k])$ est fermé (comme préimage d'un fermé par une application continue) et on a $f^{-1}([-k,k]) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$ car si $x \neq U_1 \cup \ldots \cup U_k$, alors

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} j\varphi_j(x) = \sum_{j=k+1}^{\infty} j\varphi_j(x) \geq (k+1) \sum_{j=k+1} \varphi_j(x) = (k+1)\sum_{j=1} \varphi_j(x) = k+1,$$

d'où $f(x) \notin [-k,k]$ Ainsi, $f^{-1}([-k,k]) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_j)$ qui est compact en tant qu'union finie de compacts. Il suit que $f^{-1}([-k,k])$ est fermé dans un compact et donc compact lui même (puisque M est de Hausdorff). Maintenant, soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact quelconque. Alors il est contenu dans un intervalle de la forme $[-k,k]$. Sa préimage est donc contenue dans la préimage de $[-k,k]$ et par le même argument elle est compacte.

Exercice 10.2. (Lemme de Urysohn C^∞)
Soient M une variété différentiable et $F_0, F_1 \subset M$ deux sous-ensembles fermés disjoints. Montrer qu'il existe une application différentiable $f : M \to [0,1]$ telle que $f|_{F_0} = 0$ et $f|_{F_1} = 1$.

Solution 10.2. On pose $W_0 = M \setminus F_1$ et $W_1 = M \setminus F_0$ et on considère un recouvrement localement fini $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M avec $\overline{U}_\alpha \subset M$ compact vérifiant $U_\alpha \subset W_0$ ou $U_\alpha \subset W_1$ pour tout $\alpha \in A$. Soit $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une partition de l'unité subordonné à $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Posons $A_i = \{\alpha \in A \mid U_\alpha \subset W_i\}$ pour $i = 0,1$ et considérons les deux fonctions définies par

$$f_0 = \sum_{\alpha\in A_0} \eta_\alpha \quad \mathrm{et} f_1 = \sum_{\alpha\in A_1} \eta_\alpha.$$

Puisque $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est une partition de l'unité, ces fonctions sont clairement C^∞ et on a $f_0 + f_1 = 1$, et $f_0|_{F_1} = 0$ et $f_1|_{F_0} = 0$. Ainsi la fonction f_1 vérifie

$$f_1|_{F_0} = 0 \quad \text{et} \quad f_1|_{F_1} = 1 - f_0|_{F_1} = 1,$$

et donc la fonction recherchée est $f = f_1$.

Exercice 10.3. (a) Soient $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Soient aussi les fonctions suivantes $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = y$. Montrer que XY n'est pas une dérivation de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(b) Soit M une variété différentiable et X, Y deux champs de vecteurs C^∞ sur M. Montrer que le crochet de Lie de $[X,Y]$ définit un champ de vecteurs C^∞ sur M.

(c) Si les expressions de X et Y (dans un certain système de coordonnées $(x^1,\ldots,x^n)$) sont $X = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, trouver l'expression en coordonnées de $[X,Y]$.

(d) Déduire du point précédent que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv 0,$$

pour tout champs de vecteurs de coordonnées.

(e) Montrer les propriétés suivantes du crochet de Lie:

(i) **Bilinéarité:** pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

(ii) **Antisymétrie:**

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(iii) **Identité de Jacobi:**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(iv) Pour $f, g \in C^\infty(M)$:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

(f) Pour les champs de vecteurs X, Y suivants définis sur $\mathbb{R}^3$, calculer leur crochet de Lie $[X, Y]$.

(i) $X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$;

(ii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$;

(iii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$;

Solution 10.3. (a) On montre que XY ne vérifie pas la règle de Leibniz. D'une part,

$$XY(fg) = X(fY(g) + gY(f)) = X\left(x^2\frac{\partial y}{\partial y} + yx\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x,$$

et d'autre part,

$$fXY(g) + gXY(f) = xX\left(x\frac{\partial y}{\partial y}\right) + yX\left(x\frac{\partial x}{\partial y}\right) = x\frac{\partial x}{\partial x} = x.$$

(b) On doit montrer que $[X, Y]$ est une dérivation globale de $C^\infty(M)$. De façon évidente, $[X, Y]$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Pour la règle de Leibniz, soient $f, g \in C^\infty(M)$. Alors

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X\left(Y(fg)\right) - Y\left(X(fg)\right)\\
&= X\left(fY(g) + gY(f)\right) - Y\left(fX(g) + gX(f)\right)\\
&= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f))\\
&\quad - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f))\\
&= fX(Y(g)) + gX(Y(f)) - fY(X(g)) - gY(X(g))\\
&= f[X, Y](g) + g[X, Y](f).
\end{aligned}$$

(c) Pour $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(b^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\left(a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\\
&= a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + a^ib^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - b^ja^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\\
&= a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
&= \left(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

D'où

$$[X,Y] = \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

(d) Par le point précédent, si a^i et b^j sont des constantes, alors $[X,Y] \equiv 0$.

(e) La bilinéarité et l'antisymétrie sont clairs. Pour l'identité de Jacobi, on a:

$$\begin{aligned}
&[X,[Y,Z]](f) + [Y,[Z,X]](f) + [Z,[X,Y]](f) \\
&\quad = X([Y,Z](f)) - [Y,Z](X(f)) + Y([Z,X](f)) \\
&\qquad - [Z,X](Y(f)) + Z([X,Y](f)) - [X,Y](Z(f)) \\
&\quad = XYZ(f) - XZY(f) - YZX(f) + ZYX(f) + YZX(f) - YXZ(f) \\
&\qquad - ZXY(f) + XZY(f) + ZXY(f) - ZYX(f) - XYZ(f) + YXZ(f) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Pour (iv), on a si $h \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
[fX, gY](h) &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) \\
&= fX(g)Y(h) + fgX(Y(h)) - gY(f)X(h) - gfY(X(h)) \\
&= fg([X,Y](h)) + (fXg)(Y(h)) - (gYf)(X(h)).
\end{aligned}$$

(f) On calcule et on trouve

(i) $[X,Y] = 4xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$;

(ii) $[X,Y] = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$;

(iii) $[X,Y] = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}$;

Exercice 10.4. Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) muni d'une application bilinéaire (notée $[\cdot,\cdot]$) antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

(a) Montrer qu'à toute algèbre $\mathcal{A}$ est associée une algèbre de Lie $(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$ où le crochet est défini par $[A,B] := AB - BA$.

(b) En particulier $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie (où $[A,B] := AB - BA$). Montrer que l'ensemble $\mathfrak{so}_n \subset M_n(\mathbb{R})$ des $n \times n$ matrices antisymétriques est une sous-algèbre de Lie et calculer sa dimension.

(c) Montrer que $(\mathbb{R}^3, \times)$ (où $\times$ désigne le produit vectoriel) est une algèbre de Lie et qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$.

Solution 10.4. (a) By definition, the lie product $[\cdot,\cdot]$ is certainly bi-linear and antisymmetric. The same computation as in a previous exercise shows also that $[\cdot,\cdot]$ satisfies the Jacobi identity
(b) The set $\mathfrak{so}_n$ is the set of anti-symmetric matrices, which is closed under addition and multiplication by a scalar. In order to show that it is a Lie sub-algebra, we need to show that it is also closed under the commutator (i.e., $[\cdot,\cdot]$, the Lie product of the Lie algebra). Let $A, B \in \mathfrak{so}_n$, and consider

$$[A,B]^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = -[A,B]\,.$$

This proves statement (b). It is clear that the dimension of $\mathfrak{so}_n$ is $\frac{n(n-1)}{2}$.
(c) Given for granted the linearity and anti-symmetry of the vector product, we only need to show that it satisfies the Jacobi identity. This is a property studied in the first courses of calculus, we only briefly remind one of its proof.

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \langle a|c\rangle\, b - \langle a|b\rangle\, c + \langle b|a\rangle\, c - \langle b|c\rangle\, a + \langle c|b\rangle\, a - \langle c|a\rangle\, b = 0\,.$$

In order to show that this Lie algebra is isomorphic to $\mathfrak{so}_3$, we need to find a bijective linear map $i : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}_3$ which preserves the Lie product, i.e., for which

$$[i(a), i(b)] = i(a \times b)\,. \tag{1}$$

We define this map using a convenient basis for $\mathbb{R}^3$ and $\mathfrak{so}_3$. Consider the canonical basis of $\mathbb{R}^3$ given by e_1, e_2, e_3. Recall that

$$e_1 \times e_2 = -e_2 \times e_1 = e_3\,, \quad e_2 \times e_3 = -e_3 \times e_2 = e_1\,, \quad e_3 \times e_1 = -e_1 \times e_3 = e_2\,.$$

Consider the (also canonical) basis for $\mathfrak{so}_3$ given by

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

By simple matrix multiplications, we obtain the relations

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_3\,, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_1\,, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_2\,.$$

Thus we can define the linear map i by setting $i(e_i) = \hat{e}_i$ for all i, and extend it to all $\mathbb{R}^3$ by linearity. This map has all the properties we want.

Exercice 10.5. Notons $\mathfrak{g}$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de

$$X := y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y := z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z := x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Montrer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et trouver sa dimension. Puis montrer qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de l'exercice précédent.

Solution 10.5. To show that $\mathfrak{g}$ is a Lie algebra, we only need to check that the Lie bracket of any two of these vector fields is again an element in $\mathfrak{g}$. In order to do so, we need just compute directly the following relations:

$$[X, Y] = -Z\,, \quad [X, Z] = Y\,, \quad [Y, Z] = -X\,.$$

As seen in the previous exercise, we can build an algebra-isomorphism between $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{so}_3$ by a linear map i defined on the basis by

$$i(X) = \hat{e}_1\,, \quad i(Y) = \hat{e}_2\,, \quad i(Z) = -\hat{e}_3\,.$$

Exercice 10.6. Soit $f\colon M \to N$ une fonction lisse entre deux variétés. Deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(M)$, $Y \in \Gamma(N)$ sont dits *f-reliés* si $df_p(X_p) = Y_{f(p)}$ pour tout $p \in M$.

(a) Montrer que deux champs de vecteurs sont f-reliés si et seulement si, pour toute fonction lisse $g \in C^\infty(N)$,

$$Y(g) \circ f = X(g \circ f).$$

(b) En déduire que si X_i et Y_i sont f-reliés ($i = 1, 2$), alors les crochets $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ sont f-reliés.

Solution 10.6. (a) If X and Y are f-related, then

$$X(g \circ f) = df_p X_p(g) = Y_{f(p)}(g) = Y(g) \circ f\,.$$

On the other hand, if the last equation holds for all functions g, then by definition the two derivations $Y|_{f(p)}$ and X_p are the same for all p.

(b) Consider that

$$X_1X_2(g\circ f) = X_1\left(X_2(g\circ f)\right) = X_1\left(Y_2(g)\circ f\right) = Y_1\left(Y_2(g)\right)\circ f = Y_1Y_2(g)\circ f\,.$$

We obtain a similar relation for $X_2X_1(g\circ f)$. Thus we have that for all $g\in C^\infty(M)$

$$[X_1,X_2](g\circ f) = [Y_1,Y_2](g)\circ f\,.$$

Exercice 10.7. Trouver un champ de vecteurs tangent partout non nul sur $\mathbb{S}^{2n+1}$ (il est en revanche impossible d'avoir un tel champ en dimension paire).
Indication. On peut voir la sphère comme une sous-variété plongée dans $\mathbb{R}^{2n+2}$, il suffit donc de trouver une application lisse (partout non nulle) $F:\mathbb{S}^{2n+1}\to\mathbb{R}^{2n+2}$ telle que $\langle x, F(x)\rangle = 0$.

Solution 10.7. Pour $x\in\mathbb{S}^{2n+1}$, soit

$$F(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n+2}, x_{2_n+1}).$$

Alors pour tout $x\in\mathbb{S}^{2n+1}$, le vecteur $F(x)$ de $\mathbb{R}^{2n+2}$ est non nul et orthogonal à x, et donc tangent à $\mathbb{S}^{2n+1}$. Par ailleurs, l'application F ainsi définie est différentiable.
Pour une sphère de dimension paire, on peut montrer qu'il n'existe pas de tel champ, mais cela nécéssite plus de travail. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de la boule chevelue.*

Exercice 10.8. Montrer que si M et N sont deux variétés différentiables, alors le fibré tangent du produit $T(M\times N)$ est difféomorphe à $TM\times TN$.

Solution 10.8. On commence par montrer qu'on a en tout point $(p,q)\in M\times N$ un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$f_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M\times N) \longrightarrow T_pM\times T_qN = T_pM\oplus T_qN.$$

Cet isomorphisme est construit de la façon suivante: soient $\pi : M\times N\to M$ et $\pi' : M\times N\to N$ les projections canoniques. Ces applications étant différentiables, leur différentielle est bien définie et on pose pour $v\in T_{(p,q)}(M\times N)$

$$f_{(p,q)}(v) = \left(d\pi_{(p,q)}(v), d\pi'_{(p,q)}(v)\right).$$

Si $(x^1,\ldots,x^m)$ sont des coordonnées sur un voisinage U de $p\in M$ et $(y^1,\ldots,y^n)$ des coordonnées sur un voisinage V de $q\in N$, alors $(x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots,y^n)$ forme un système de coordonnées sur le voisinage $U\times V$ de $(p,q)\in M\times N$ et une base de $T_{(p,q)}(M\times N)$ est donc donnée par

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right)$$

Sur cette base on a

$$d\pi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad\text{et}\quad d\pi\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$$
$$d\pi'\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0 \quad\text{et}\quad d\pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Ce qui montre que $f_{(p,q)}$ est bien un isomorphisme (application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension). Soit ensuite l'application $F: T(M\times N)\longrightarrow TM\times TN$ dont la restriction à chaque fibre $T_{(p,q)}(M\times N)$ vaut $f_{(p,q)}$. On souhaite montrer que F est un difféomorphisme.

Pour montrer que F est un difféomorphisme, il faut la regarder dans les cartes. Il est nécessaire à ce stade de bien fixer les notations afin de ne pas se perdre. On note $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ et $\{(V_j,\psi_j)\}_{j\in J}$ les atlas différentiables sur M et N respectivement. On obtient alors un atlas différentiable $\{(U_i\times V_j, \varphi_i\times\psi_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ sur $M\times N$ et des atlas différentiables $\{(TU_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ et $\{(TV_j,\Psi_j)\}_{j\in J}$ sur les fibrés tangents TM et TN respectivement. Rappelons que ces atlas sont définis par

$$\Phi_i : TU_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)\times\mathbb{R}^m, \quad (p,v)\mapsto \Big(\varphi_i(p),\, d\varphi_i|_p(v)\Big)$$
$$\Psi_j : TV_j \longrightarrow \psi_j(V_j)\times\mathbb{R}^n, \quad (q,w)\mapsto \Big(\psi_j(q),\, d\psi_j|_q(w)\Big)$$

Il reste encore à fixer les notations pour les atlas de $T(M\times N)$ et $TM\times TN$. On va noter

$$\Theta_{i,j} : T(U_i\times V_j)\longrightarrow \varphi_i(U_i)\times\psi_j(V_j)\times\mathbb{R}^{m+n}\subset\mathbb{R}^{2(m+n)}$$

pour $T(M\times N)$ et

$$\Phi_i\times\Psi_j : TU_i\times TV_j\longrightarrow \varphi_i(U_i)\times\mathbb{R}^m\times\psi_j(V_j)\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{2(m+n)}.$$

Nous voulons voir que l'application

$$(\Phi_k\times\Psi_l)\circ F\circ\Theta_{i,j}^{-1} : \Theta_{i,j}\big(T(U_j\times V_j)\cap F^{-1}(TU_k\times TU_l)\big)\longrightarrow \Phi_k(TU_k)\times\Psi_l(TU_l)$$

est C^∞. Soit $(\overline{x},\overline{y},\overline{v})\in\Theta_{i,j}\big(T(U_j\times V_j)\cap F^{-1}(TU_k\times TU_l)\big)$ avec $\overline{x}\in\varphi_i(U_i)$, $\overline{y}\in\psi_j(V_j)$ et $\overline{v}\in\mathbb{R}^{m+n}$. Notons $x=\varphi_i^{-1}(\overline{x})$, $y=\psi_j^{-1}(\overline{y})$ et finalement $v=d(\varphi_i\times\psi_j)^{-1}|_{(\overline{x},\overline{y})}(\overline{v})$, de sorte à avoir

$$\Theta_{i,j}^{-1}(\overline{x},\overline{y},\overline{v})=(x,y,v)\in T(U_i\times V_j)\cap F^{-1}(TU_k\times TU_l).$$

Nous avons ensuite

$$F(x,y,v)=\Big(d\pi_{(x,y)}(v),d\pi'_{(x,y)}(v)\Big)$$

et finalement

$$(\Phi_k\times\Psi_l)\Big(d\pi_{(x,y)}(v),d\pi'_{(x,y)}(v)\Big)=\big(\varphi_k(x),\psi_l(y),d(\varphi_k\circ\pi)_{(x,y)}(v),d(\psi_l\circ\pi')_{(x,y)}(v)\big)$$

qui est bien C^∞ puisque chacune des quatre composantes l'est.
Il reste donc à montrer que F admet un inverse qui soit aussi C^∞. Comme précédemmment, on commence par chercher un inverse "fibre par fibre", i.e. un inverse pour chaque $f_{(p,q)}$. Etant donné un point $(p,q)\in M\times N$, il est donc naturel de considérer les inclusions (par opposition aux projections π et π'):

$$\iota_q : M\to M\times N,\quad \iota_q(p)=(p,q)\quad\text{et}\quad \iota'_p : N\to M\times N,\quad \iota'_p(q)=(p,q).$$

On définit alors une application $g_{(p,q)} : T_pM\times T_qN\longrightarrow T_{(p,q)}(M\times N)$ par

$$g_{(p,q)}(v,w)=d\iota_q(v)+d\iota'_p(w).$$

Comme $(\pi\circ\iota_q)(p)=p$ et $(\pi'\circ\iota'_p)(q)=q$ pour tout $(p,q)\in M\times N$, on obtient bien que $g_{(p,q)}=f_{(p,q)}^{-1}$. En effectuant un raisonnement similaire à celui effectué pour F (donc en regardant dans les cartes), on montre que l'application

$$G : TM\times TN\longrightarrow T(M\times N),\quad ((p,v),(q,w))\mapsto g_{(p,q)}(v,w)$$

est C^∞.