

Exercice 12.1. Soit M une variété différentiable. On note

$$\text{End}(\Gamma(M)) = \{A : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M) \mid A \text{ est } C^\infty(M)\text{-linéaire}\}.$$

Montrer que $\text{End}(\Gamma(M)) = \text{Tens}_1^1(M)$.

Exercice 12.2. Montrer la proposition suivante vue au cours:

L'application d'alternisation

$$\text{Alt} : \text{Tens}_k(M) \rightarrow \Omega^k(M), \quad \text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma)^\sigma T,$$

vérifie les conditions suivantes:

- (a) Si $T \in \text{Tens}_k(M)$, alors $\text{Alt}(T) \in \Omega^k(M)$, c'est-à-dire, Alt est bien définie;
- (b) Si $\alpha \in \Omega^k(M)$, alors $\text{Alt}(\alpha) = \alpha$;
- (c) Alt est un projecteur, c'est-à-dire, $\text{Alt} \circ \text{Alt} = \text{Alt}$;
- (d) Si $T \in \text{Tens}_k(M)$ et $S \in \text{Tens}_l(M)$, alors on a

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\text{Alt}(T) \otimes S) &= \text{Alt}(T \otimes \text{Alt}(S)) \\ &= \text{Alt}(T \otimes S) \\ &= \text{Alt}(\text{Alt}(T) \otimes \text{Alt}(S)). \end{aligned}$$

Exercice 12.3. Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $F : M \rightarrow N$ une application C^∞ . Etant donnée une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(N)$, on peut la "rappeler" sur M pour obtenir une k -forme différentielle sur M , notée $F^*\omega \in \Omega^k(M)$ que l'on appelle le *rappel* de ω par F (ou *pullback* en anglais). Cette forme est définie par

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)),$$

pour $v_1, \dots, v_k \in T_p M$. Montrer les propriétés suivantes du rappel:

- (a) Si $h \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$, alors $F^*h = h \circ F$;
- (b) L'application $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire;
- (c) Pour $\omega \in \Omega^k(N)$ et $\eta \in \Omega^l(N)$ on a $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$;
- (d) Soient $(U, x^1, \dots, x^m)$ est une carte de M et $(V, y^1, \dots, y^n)$ une carte de N , alors si

$$\alpha_y = a(y) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k} \in \Omega^k(V),$$

on a (pour $F(x) = y$)

$$(F^*\alpha)_x = a(F(x)) dF^{j_1} \wedge \dots \wedge dF^{j_k} \in \Omega^k(U),$$

où $F = (F^1, \dots, F^n)$

Exercice 12.4. Notons par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes usuelles de $\mathbb{R}^3$ et (u, v) celles de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ et soit la 2-forme définie par

$$\omega = ydx \wedge dz + xdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Calculer le rappel de ω par F .

Exercice 12.5. Notons par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes usuelles de $\mathbb{R}^3$ et (v, w) celles de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction lisse définie par $\varphi(x, y, z) = (x + z, xy)$ et soient $\alpha = e^w dv + vdw$ et $\beta = v dv \wedge dw$ deux formes sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les formes suivantes.

$$\alpha \wedge \beta, \quad \varphi^*(\alpha), \quad \varphi^*(\beta) \quad \text{et} \quad \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

Exercice 12.6. On introduit pour cet exercice la définition de différentielle extérieure qui généralise la différentielle aux tenseurs. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\omega \in \Omega^k(U)$ une k -forme sur U . Si $(x^1, \dots, x^n)$ est un système de coordonnées sur U , la k -forme ω s'écrit $\omega = \omega_I dx^I$, où $I = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ et $\omega_I \in C^\infty(U)$. On définit la *différentielle extérieure* $d\omega$ de ω comme étant la $(k+1)$ -forme suivante (sur U):

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

On verra plus tard une définition de la différentielle extérieure pour les formes différentielles sur une variété quelconque. Montrer les propriétés suivantes:

- (a) d est $\mathbb{R}$ -linéaire;
- (b) Si $\omega \in \Omega^k(U)$ et $\eta \in \Omega^l(U)$, alors $d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;
- (c) $d \circ d = 0$;
- (d) Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $F : U \rightarrow V$ est une application différentiable et ω est une k -forme sur V , alors $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

Exercice 12.7. Considérons les formes différentielles suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = xdx - ydy, \quad \beta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz, \quad \gamma = e^{2xy} dz.$$

Calculer $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et $\alpha \wedge \beta$ et $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.