Exercice 11.1. Soit M une variété différentiable de dimension n. Un *repère mobile* sur un ouvert $U \subset M$ est un n-tuple de champs de vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ tel qu'en chaque point $p \in U$ la liste $(X_1|_p, \dots, X_n|_p)$ forme une base de T_pM. On dit qu'un repère mobile est *global* si $U = M$.

(a) Trouver un repère mobile global sur $\mathbb{S}^1$. En déduire un repère mobile global sur le tore $\mathbb{T}^n$.

(b) On dit qu'une variété différentiable M est *parallélisable* si son fibré tangent est trivial. Cette condition signifie qu'il existe un difféomorphisme $\Psi : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ qui commute avec les projections et dont la restriction à chaque fibre est une application linéaire $\Psi_p : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$.

Montrer que M est parallélisable si et seulement s'il existe un repère mobile global sur M.

Remarque. Observons que ce résultat peut s'énoncer en disant que M est parallélisable si et seulement s'il existe n champs de vecteurs qui sont linéairement indépendants en chaque point de M. Malgré la simplicité de cette notion, il n'est pas si facile de prouver qu'une variété est non parallélisable, l'exemple le plus simple est la sphère $\mathbb{S}^2$ (et plus généralement les sphères de dimensions paires $\mathbb{S}^{2m}$). On montre en fait que tout champ de vecteur sur $\mathbb{S}^{2m}$ s'annule au moins en un point, les preuves classiques utilisent des techniques de topologie algébrique. En dimension 2, la seule surface compacte sans bord parallélisable est le tore $\mathbb{T}^2$.

Solution 11.1. (a) On considère sur $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ le système de cartes suivant (U, φ) et (V, ψ), avec

$$U = \left\{ e^{2\pi i\alpha} \Big| \frac{-\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4} \right\}, \quad \varphi(e^{2\pi i\alpha}) = \alpha$$
$$V = \left\{ e^{2\pi i\beta} \Big| \frac{3\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{9\pi}{4} \right\}, \quad \psi(e^{2\pi i\beta}) = \beta.$$

Ces deux systèmes de coordonnées induisent des champs de coordonnées $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial\beta}$ dont on va montrer qu'ils coïncident partout sur l'intersection $U \cap V$, formant ainsi un champ de vecteurs global partout non nul, et donc un repère mobile global puisque $\dim(\mathbb{S}^1) = 1$. Sur l'intersection $U \cap V$, les deux coordonnées sont égales à une constante près, i.e. il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout point $p \in U \cap V$ on a $\alpha(p) = \beta(p) + C$. Or, par la formule du changement de variables (c.f. cours), on a

$$\frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta + C)\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}$$

En ce qui concerne le tore, on effectue la même construction sur chaque élément du produit $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ pour obtenir un repère mobile de la forme $\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\theta^n}\right)$.

(b) Supposons d'abord que M est parallélisable, i.e qu'il existe un difféomorphisme $\Psi : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ tel que si $\pi : TM \to M$ et $\pi_1 : M \times \mathbb{R}^n \to M$ sont les projections standards, alors le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & M \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & M \end{tikzcd}$$

et la restriction $\Psi_p : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ est un linéaire (et donc un isomorphisme). On veut construire un repère mobile global sur M. Pour ce faire, définissons les champs de vecteurs suivants

$$X_i\big|_p = \Psi_p^{-1}(p, e_i)$$

pour $1 \leq i \leq n$, avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme Ψ est un difféomorphisme, il suit que les X_i sont différentiables et puisqu'en chaque point $p \in M$ l'application Ψ_p est un isomorphisme, on a que $(X_1\big|_p, \ldots, X_n\big|_p)$ forme une base de T_pM.

Supposons maintenant qu'il existe un repère mobile global $(X_1, \ldots, X_n)$ sur M. On définit une application $\Phi : M \times \mathbb{R}^n \to TM$ par $\Phi(p, v) = \left(p, v^i\, X_i\big|_p\right)$, où les v^i sont les composantes de v dans la base canonique. L'application Φ ainsi construite est bijective puisque les $X_i\big|_p$ forment une base de T_pM en tout point $p \in M$ et il reste à montrer que Φ est un difféomorphisme. Pour ce faire, on regarde dans les cartes. Considérons $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas sur M et soit $\{(U_i \times \mathbb{R}^n, \varphi_i \times \mathrm{id})\}$ l'atlas sur $M \times \mathbb{R}^n$ correspondant ainsi que $\{(TU_i, \varphi_i \times d\varphi_i)\}$ celui sur le fibré tangent TM. En tout point $p \in M$ dans un ouvert U_i, on dispose de deux bases différentes de l'espace tangent, et donc il existe des fonctions $a_j^i \in C^\infty(U_i)$ telles que sur U_j on ait

$$X_i = a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

où $(x^1, \ldots, x^n)$ est le système de coordonnées associé à (U_i, φ_i). Ainsi, si

$$(x, v) \in (\varphi_i \times \mathrm{id})\left((U_i \times \mathbb{R}^n) \cap \Phi^{-1}(TU_j)\right)$$

on obtient en notant $q = \varphi_i^{-1}(x)$ que la composition avec les applications de cartes donne

$$\begin{aligned}
(\varphi_j \times d\varphi_j) \circ \Phi \circ (\varphi_i \times \mathrm{id})^{-1}(x, v) &= \left(x,\, d\varphi_j\big|_q \left(v^i\, X_i\big|_q\right)\right) \\
&= \left(x,\, d\varphi_j\big|_q \left(v^i a_i^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_q\right)\right) \\
&= \left(x, (v^i a_i^1, \ldots, v^i a_i^n)\right)
\end{aligned}$$

qui est bien C^∞. L'application inverse quant à elle est donnée par $\Phi^{-1}(p, v) = (p, (v^1, \ldots, v^n))$, où v^i est la i-ème composante de v dans la base $(X_1\big|_p, \ldots, X_1\big|_p)$. Un raisonnement similaire à celui effectué pour Φ montre que Φ^{-1} est C^∞.

Exercice 11.2. Un *groupe de Lie* est une variété différentiable G qui est aussi un groupe au sens algébrique et tel que la multiplication et l'inversion sont lisses. Etant donnés deux groupes de Lie G et H, un homomorphisme de groupes de Lie $F : G \to H$ est un homomorphisme de groupes qui est différentiable. Un isomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme de groupes de Lie qui est un difféomorphisme.

(a) Montrer que si une variété différentiable G est munie d'une structure de groupe telle que l'application $G \times G \to G$ définie par $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ est lisse, alors G est un groupe de Lie.

(b) Montrer que les applications de multiplication à gauche et à droite, i.e. les applications

$$L_g : G \to G, \quad L_g(h) = gh \quad \text{et} \quad R_g : G \to G, \quad R_g(h) = hg$$

sont différentiables.

(c) Montrer que les variétés différentiables suivantes sont des groupes de Lie

(i) $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition; $\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication; $\mathbb{S}^1$ muni de la multiplication complexe;

(ii) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ munis de la multiplication matricielle;

(d) Trouver un homomorphisme de groupes de Lie entre les groupes de Lie $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Montrer ensuite que l'application $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $\pi(t) = e^{2\pi it}$ est un homomorphisme de groupes de Lie.

(e) Montrer que tout homomorphisme de groupe de Lie est de rang constant.

Solution 11.2. (a) On doit montrer que la composition et l'inversion du groupe sont C^∞. Notons e l'élément neutre de G. Pour l'inversion, observons que puisque $(g, h) \mapsto (gh^{-1})$ est C^∞ la composition d'applications C^∞ suivante

$$g \mapsto (e, g) \mapsto e \cdot g^{-1} = g^{-1}$$

est C^∞ et donne l'inversion. On écrit aussi la multiplication comme composition d'applications C^∞:

$$(g, h) \mapsto (g, h^{-1}) \mapsto g(h^{-1})^{-1} = gh.$$

Ainsi G est un groupe de Lie.

(b) A nouveau, on peut exprimer la multiplication L_g comme composition d'applications C^∞:

$$G \xrightarrow{\iota_g} G \times G \xrightarrow{m} G,$$

où $\iota_g : G \to G \times G$ est l'inclusion définie par $\iota_g(h) = (g, h)$ et m est la composition du groupe. Idem pour R_g. On remarque que L_g et R_g sont en fait des *difféomorphismes*, en effet leurs inverses sont donnés par $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$ qui sont différentiables par le même argument.

(c) Ce sont essentiellement des résultats déjà connus:

(i) Ce sont des vérifications simples; remarquons que comme le produit cartiésien préserve les structures de groupes et de variétés différentiables, la structure de groupe de Lie de $\mathbb{S}^1$ induit une structure de groupe de Lie sur le tore $\mathbb{T}^n$.

(ii) C'est évidemment un groupe pour la multiplication matricielle et on a montré dans une série précédente que c'est une variété différentiable. La multiplication et l'inversion sont différentiables par un argument déjà utilisé: les entrées du produit AB de deux matrices est un polynôme dans les entrées de A et B, et les entrées de A^{-1} est aussi un poylnôme dans les entrées de la matrice A. En ce qui concerne $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on sait qu'on peut l'exprimer comme $\det^{-1}(1)$, et donc que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (c.f exercice 4.7). De plus, comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, il suit que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

(d) On définit l'application $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ par $f(t) = e^t$. Comme $f(t + s) = e^{t+s} = e^t e^s = f(t)f(s)$, il suit que f est un homomorphisme de groupes. Cette application est évidemment différentiable et donc est un homomorphisme de groupes de Lie.

Le fait que π soit un homomorphisme de groupes de Lie est clair avec ce qui précède. Notons que son noyau est donné par les entiers $\mathbb{Z}$.

(e) Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes de Lie. Notons e l'élément neutre de G et $\tilde{e}$ l'élément neutre de H. On va montrer que le rang de f en un point quelconque est le même qu'en l'identité. Soit $g_0 \in G$. Puisque f est un homomorphisme, on a pour tout $g \in G$ que

$$f(L_{g_0}(g)) = f(g_0 g) = f(g_0)f(g) = L_{f(g_0)}(f(g))$$

et donc $f \circ L_{g_0} = L_{f(g_0)} \circ f$. En prenant la différentielle des deux côtés de la dernière égalité et en appliquant la règle de dérivation en chaine, on trouve

$$df_{g_0} \circ d(L_{g_0})_e = d(L_{f(g_0)})_{\tilde{e}} \circ df_e.$$

Or, comme L_{g_0} est un difféomorphisme, il suit que $d(L_{g_0})_e$ et $d(L_{f(g_0)})_{\tilde{e}}$ sont des isomorphismes. Or, composer une application linéaire avec un isomorphisme ne change pas son rang, ainsi df_{g_0} et df_e ont le même rang.

Exercice 11.3. Soit G un groupe de Lie. Un champ de vecteur X sur G est dit *invariant à gauche* si $d(L_g)_h(X_h) = X_{gh}$ pour tout $g, h \in G$.

(a) Montrer que si $X, Y \in \Gamma(M)$ sont deux champs de vecteurs sur G invariants à gauche, alors $[X, Y]$ est invariant à gauche. L'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à gauche forme donc une algèbre de Lie, appelée *algèbre de Lie de* G et notée $\mathrm{Lie}(G)$.

(b) Montrer que l'application suivante

$$\alpha : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow T_eG, \quad \alpha(X) = X_e$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) Montrer que tout groupe de Lie est parallélisable.

Solution 11.3. (a) En reprenant le vocabulaire de l'exercice 10.6, on peut reformuler le fait d'être *invariant à gauche* pour un champ $X \in \Gamma(G)$ en disant que X est L_g-relié à lui-même. Ainsi par le point (b) de l'exercice 10.6, on obtient que si deux champs X et Y sont L_g-relié à eux-mêmes, alors leur crochet est aussi L_g-relié à lui-même, i.e. leur crochet est un champ invariant à gauche.

(b) Si un champ X sur G est invariant à gauche, alors on a

$$X_g = d(L_g)_e(X_e),$$

ce qui montre que α est injective. Pour la surjectivité, nous devons voir qu'étant donné un vecteur $v \in T_eG$, l'application $X : G \to TG$ donnée par $X(g) = d(L_g)_e(v)$ est un champ de vecteurs (l'invariance à gauche de ce champ étant vérifiée par construction). Nous allons montrer que cette application définit une dérivation. Soit donc $f \in C^\infty(G)$. Considérons alors l'application $L_vf : G \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_v(f) = df_g(d(L_g)_e(v)).$$

Il est clair que L_v vérifie la règle de Leibniz:

$$L_v(fg) = (L_vf)g + f(L_vg), \quad \text{pour tout } f, g \in C^\infty,$$

et il reste à montrer que L_vf est lisse. Pour ce faire, considérons une courbe $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ une courbe différentiable vérifiant $\gamma(0) = e$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. Alors par la règle de dérivation en chaine, on a

$$L_vf(g) = df_g(d(L_g)_e(v)) = d(f \circ L_g)_e(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ L_g)(\gamma(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(g\gamma(t)).$$

Or, l'application $(t, g) \mapsto f(g\gamma(t))$ est différentiable sur $(-\epsilon, \epsilon) \times G$, donc sa dérivée partielle par rapport à t aussi.

(c) Soit G un groupe de Lie de dimension n. Par l'exercice 11.1, il suffit de montrer qu'il existe un repère mobile global sur G. L'idée est de prendre une base de T_eG et de la "transporter" sur toute le groupe de Lie. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de T_eG. Alors, par le point précédent, chaque v_i correspond à un champ de vecteurs $V_i \in \Gamma(G)$ invariant à gauche sur G. La liste $(V_1, \ldots, V_n)$ est donc un repère mobile global sur G, ce qui montre que G est parallélisable.

Exercice 11.4. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

(a) Montrer que le groupe spécial unitaire de degré 2:

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = I, \quad \det(A) = 1\}$$

est un groupe de Lie. Déterminer une base de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

(b) Montrer que $\mathbb{S}^3$ est difféomorphe au groupe SU(2) via l'application $f : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \to \mathrm{SU}(2)$ donnée par

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x+iy & -z+it \\ z+it & x-iy \end{pmatrix}$$

(c) En déduire que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

Solution 11.4. (a) Il n'est pas difficile de montrer que SU(2) est un groupe de Lie en imitant des arguments de l'exercice 11.2. Par l'exercice 11.4, on sait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ est isomorphe à $T_I\mathrm{SU}(2)$, où I est la matrice identité. L'espace tangent à SU(2) en l'identité est engendré par les vitesses de courbes $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{SU}(2)$ telles que $\gamma(0) = I$. Soit donc $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathrm{SU}(2)$ une telle courbe; alors pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ on a

$$\det(\gamma(t)) = 1, \quad \text{et} \quad \gamma(t)\gamma^*(t) = I.$$

En prenant la différentielle à gauche et à droite de ces deux égalités on obtient d'une part

$$\begin{aligned} d(\det(\gamma))_t &= d(\det)_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Cof}(\gamma(t))^T\dot{\gamma}(t)\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé un résultat de la série 2 sur la différentielle du déterminant ainsi que la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Cof}(A)^T$ pour une matrice inversible. D'autre part

$$0 = d(\gamma(t)\gamma^*(t)) = \dot{\gamma}(t)\gamma^*(t) + \gamma(t)\dot{\gamma}^*(t).$$

En $t = 0$, ces deux relations montrent que

$$T_I\mathrm{SU}(2) \subset \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0 \quad \text{et} \quad A^* = -A\} =: W.$$

Si on peut montrer que ces espaces vectoriels ont même dimension alors on aura égalité entre les deux. Or, il est clair que $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$ et $\dim_{\mathbb{R}}(T_I\mathrm{SU}(2)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{SU}(2))$. Mais,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \Longrightarrow ad - bc = 1 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ainsi, la matrice A se récrit

$$A = \begin{pmatrix} a & -\overline{c} \\ c & \overline{a} \end{pmatrix}$$

avec $a\overline{a} + c\overline{c} = |a|^2 + |c|^2 = 1$. Cette dernière équation est l'équation de la sphère unité $\mathbb{S}^3$, ce qui montre que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{SU}(2)) = 3$ (on montre au point (b) qu'il y a bien un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^3$ et SU(2)). Ainsi on a montré que

$$\mathfrak{su}(2) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2)) \cong T_I\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0 \quad \text{et} \quad A^* = -A\}.$$

Une base de cette algèbre de Lie est alors donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(b) L'inverse de f est donné par

$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & -\gamma + i\delta \\ \gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix}\right) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

qui est bien un point de $\mathbb{S}^3$ puisque $|\alpha + i\beta|^2 + |\gamma + i\delta|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$. Ainsi f est bijective. Il reste à montrer qu'elle et son inverse sont C^∞. On peut voir l'application f comme la restriction d'une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^4$ via l'identification d'une matrice de $\mathrm{SU}(2)$ à un vecteur de $\mathbb{C}^4$. Les composantes de cette application sont évidemment C^∞ et donc $f \in C^\infty(\mathbb{S}^3, \mathrm{SU}(2))$. Idem pour f^{-1}. Ainsi f est un difféomorphisme.

Ce difféomorphisme permet d'induire une structure de groupe de Lie sur $\mathbb{S}^3$, i.e. la composition de deux éléments $x, y \in \mathbb{S}^3$ est donnée par $x \cdot y := f^{-1}(f(x)f(y))$ et l'inversion par $x^{-1} := f^{-1}(f(x)^{-1})$. Ces opérations sont bien C^∞ puisque f est un difféomorphisme.

(c) Par le dernier point de l'exercice précédent, on obtient que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

Exercice 11.5. (Facultatif)
On présente ici une autre façon de montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable. Soit $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions. On note $S \subset \mathbb{H}$ le groupe des quaternions de norme 1.

(a) Montrer que si $p \in \mathbb{H}$ est imaginaire pur, alors $qp \in T_q S$ pour tout $q \in S$ (on a identifié l'espace tangent à $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{H}$ lui-même).

(b) On considère les trois champs de vecteurs sur $\mathbb{H}$ suivants:

$$X_q = qi, \quad Y_q = qj, \quad Z_q = qk.$$

Montrer que la restriction de ces trois champs de vecteurs à S forme un repère mobile global invariant à gauche. En déduire que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

En effectuant un raisonnement similaire sur les octonions $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, on peut montrer que $\mathbb{S}^7$ est aussi parallélisable.

Remarque. Pour qu'une variété admette une structure de groupe de Lie, il faut que cette variété soit parallélisable. Cette condition est nécessaire mais non suffisante : les travaux de Bott etc. dans les années 1950 ont montré que $\mathbb{S}^n$ est parallélisable si et seulement si $n = 0, 1, 3, 7$ mais que seules $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ admettent des structures de groupes de Lie.
Ce problème est relié à celui des structures de corps sur $\mathbb{R}^n$. Il n'est pas difficile de montrer que si $\mathbb{R}^n$ admet une structure de corps (gauche), alors $\mathbb{S}^{n-1}$ admet une structure de groupe de Lie. Par conséquent les seules dimensions pour lesquelles $\mathbb{R}^n$ est un corps sont $n = 1, 2$ et 4. Le cas $n = 8$ est un cas spécial, $\mathbb{R}^8$ n'admet pas de structure de corps mais il y a une structure d'algèbre non associative, sans diviseurs de zéro, sur $\mathbb{R}^8$, ce sont les *Octonions* (ou *Octaves de Cayley*).