Exercice 12.1. Soit M une variété différentiable. On note

$$\operatorname{End}(\Gamma(M)) = \{A : \Gamma(M) \to \Gamma(M) \mid A \text{ est } C^\infty(M)\text{-linéaire}\}.$$

Montrer qu'on a une bijection entre $\operatorname{End}(\Gamma(M))$ et $\operatorname{Tens}_1^1(M)$.

Solution 12.1. Etant donné un tenseur $T \in \operatorname{Tens}_1^1(M)$, on construit un endomorphisme de $\Gamma(M)$ en posant

$$A_T : \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M), \quad X \mapsto A_T(X),$$

où le champ de vecteurs $A_T(X)$ est vu comme une dérivation agissant sur $C^\infty(M)$ de la façon suivante:

$$A_T(X)(f) := T(X, df).$$

Il faut vérifier que $A_T(X)$ définit bien une dérivation, mais d'une part la $C^\infty(M)$-linéarité est claire puisque T est $C^\infty(M)$-linéaire et d'autre part, si $f, g \in C^\infty(M)$, alors

$$A_T(X)(fg) = T(X, d(fg)) = T(X, (df)g + f(dg)) = gT(X, df) + fT(X, dg) = gA_T(X)(f) + fA_T(X)(g),$$

d'où la règle de Leibniz.
L'inverse est donné par

$$\operatorname{End}(\Gamma(M)) \longrightarrow \operatorname{Tens}_1^1(M), \quad A \mapsto T_A : \Gamma(M) \times \Gamma^*(M) \to C^\infty(M),$$

où $T_A(X, \theta) = \theta(T_A(X))$, pour $X \in \Gamma(M)$ et $\theta \in \Gamma^*(M)$.

Exercice 12.2. Montrer la proposition suivante vue au cours:
L'application d'alternisation

$$\operatorname{Alt} : \operatorname{Tens}_k(M) \to \Omega^k(M), \quad \operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)^\sigma T,$$

vérifie les conditions suivantes:

(a) Si $T \in \operatorname{Tens}_k(M)$, alors $\operatorname{Alt}(T) \in \Omega^k(M)$, c'est-à-dire, Alt est bien définie;

(b) Si $\alpha \in \Omega^k(M)$, alors $\operatorname{Alt}(\alpha) = \alpha$;

(c) Alt est un projecteur, c'est-à-dire, $\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$;

(d) Si $T \in \operatorname{Tens}_k(M)$ et $S \in \operatorname{Tens}_l(M)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(T) \otimes S) &= \operatorname{Alt}(T \otimes \operatorname{Alt}(S)) \\
&= \operatorname{Alt}(T \otimes S) \\
&= \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(T) \otimes \operatorname{Alt}(S)).
\end{aligned}$$

Solution 12.2. (a) On doit montrer que si $T \in \operatorname{Tens}_k(M)$, alors $\operatorname{Alt}(T)$ est un tenseur alterné, c'est-à-dire vérifie ${}^\sigma \operatorname{Alt}(T) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{Alt}(T)$, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Soit donc $T \in \operatorname{Tens}_k(M)$. Observons que si $\rho, \sigma \in \mathfrak{S}_k$, alors puisque

$$\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_k \to \{-1, 1\}$$

est un morphisme de groupe, on a $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho)$. De plus $\operatorname{sgn}(\sigma)^2 = 1$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}\operatorname{Alt}(T) &= {}^{\rho}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,{}^{\sigma}T\right) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,{}^{\rho}({}^{\sigma}T) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,{}^{(\sigma\rho)}T \\
&\overset{\tau=\sigma\rho}{=} \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\rho)\,{}^{\tau}T \\
&= \operatorname{sgn}(\rho)\left(\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\tau)\,{}^{\tau}T\right) \\
&= \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{Alt}(T).
\end{aligned}$$

(b) Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$. Alors par définition, ${}^{\sigma}\alpha = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}(\alpha) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,{}^{\sigma}\alpha \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)(\operatorname{sgn}(\sigma)\alpha) \\
&= \alpha\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(\operatorname{sgn}(\alpha))^2 \\
&= \alpha\frac{k!}{k!} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $|\mathfrak{S}_k| = k!$.

(c) Evident par (b).

(d) Pour ce point, observons la chose suivante: il existe un plongement $\mathfrak{S}_k \hookrightarrow \mathfrak{S}_{k+l}$ du groupe symétrique k éléments dans le groupe symétrique à $k+l$ éléments défini par

$$\sigma \mapsto \sigma' = \begin{cases} \sigma'(j) = \sigma(j) & \text{si } j \leq k \\ \sigma'(j) = j & \text{si } j > k. \end{cases}$$

Remarquons que $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')$ puisque la décomposition en transpositions de ces deux permutations est la même. Ainsi, si $T \in \mathrm{Tens}_k(M)$ et $S \in \mathrm{Tens}_l(M)$, alors $\mathrm{Alt}(T) \otimes S \in \mathrm{Tens}_{k+l}(M)$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T) \otimes S) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau) \cdot {}^{\sigma}(({}^{\tau}T) \otimes S) \\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau') \cdot {}^{\sigma}({}^{\tau'}(T \otimes S)) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau') \cdot {}^{(\tau'\sigma)}(T \otimes S) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\rho)^{\rho}(T \otimes S) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{Alt}(T \otimes S) \\
&= \mathrm{Alt}(T \otimes S).
\end{aligned}$$

Pour montrer que $\mathrm{Alt}(T \otimes \mathrm{Alt}(S)) = \mathrm{Alt}(T \otimes S)$ on procède de même et la dernière identité est une conséquence des précédentes:

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T) \otimes \mathrm{Alt}(S)) = \mathrm{Alt}(T \otimes \mathrm{Alt}(S)) = \mathrm{Alt}(T \otimes S).$$

Exercice 12.3. Soient M^m, N^n deux variétés différentiables et $F : M \to N$ une application C^∞. Etant donnée une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(N)$, on peut la "rappeler" sur M pour obtenir une k-forme différentielle sur M, notée $F^*\omega \in \Omega^k(M)$ que l'on appelle le *rappel* de ω par F (ou *pullback* en anglais). Cette forme est définie par

$$(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}\left(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)\right),$$

pour $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Montrer les propriétés suivantes du rappel:

(a) Si $h \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$, alors $F^*h = h \circ F$;

(b) L'application $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ est $\mathbb{R}$-linéaire;

(c) Pour $\omega \in \Omega^k(N)$ et $\eta \in \Omega^l(N)$ on a $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$;

(d) Soient $(U, x^1, \ldots, x^m)$ est une carte de M et $(V, y^1, \ldots, y^n)$ une carte de N, alors si

$$\alpha_y = a(y)dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_k} \in \Omega^k(V),$$

on a (pour $F(x) = y$)

$$(F^*\alpha)_x = a(F(x))dF^{j_1} \wedge \ldots \wedge dF^{j_k} \in \Omega^k(U),$$

où $F = (F^1, \ldots, F^n)$

Solution 12.3. (a) On a $(F^*h)_p = h_{F(p)} = (h \circ F)(p)$ donc $F^*h = h \circ F$.

(b) Soient $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
(F^*(a\omega + \eta))_p(v_1, \ldots, v_k) &= (a\omega + \eta)_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)) \\
&= a\omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)) + \eta_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)) \\
&= a(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) + (F^*\eta)_p(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

(c) Soient $\omega \in \Omega^k(N)$ et $\eta \in \Omega^l(N)$. On rappelle que

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta),$$

Donc d'une part

$$\begin{aligned}
F^*(\omega \wedge \eta)_p(v_1, \ldots, v_{k+l}) &= (\omega \wedge \eta)_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_{k+l})) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)_{F(p)}(dF_p(v_1, \ldots, dF_p(v_{k+l})) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)^\sigma(\omega \otimes \eta)_{F(p)}(dF_p(v_1, \ldots, dF_p(v_{k+l})) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_{F(p)}\left(dF_p(v_{\sigma(1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k)})\right) \\
&\qquad \cdot \eta_{F(p)}\left(dF_p(v_{\sigma(k+1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k+l)})\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
(F^*\omega)_p \wedge (F^*\eta)_p(v_1, \ldots, v_{k+l}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(F^*\omega \otimes F^*\eta)_p(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)^\sigma(F^*\omega \otimes F^*\eta)_p(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)(F^*\omega)_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot (F^*\eta)_p(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_{F(p)}\left(dF_p(v_{\sigma(1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k)})\right) \\
&\qquad \cdot \eta_{F(p)}\left(dF_p(v_{\sigma(k+1)}), \ldots, dF_p(v_{\sigma(k+l)})\right).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$.

(d) Il suffit de rappeler que

$$dy^j \left(F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) = dy^j \left(\frac{\partial F^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i} = dF^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),$$

donc $F^*dy^j = dF^j$. En appliquant le point précédent on conclut.

Exercice 12.4. Notons par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes usuelles de $\mathbb{R}^3$ et (u, v) celles de $\mathbb{R}^2$.Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ et soit la 2-forme définie par

$$\omega = ydx \wedge dz + xdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Calculer le rappel de ω par F.

Solution 12.4. En utilisant l'exercice précédent, on voit que

$$F^*\omega = F^*(ydx \wedge dz + xdy \wedge dz) = F^*(ydx) \wedge F^*(dz) + F^*(xdy) \wedge F^*(dz).$$

Donc on peut calculer séparément en utilisant la formule pour le rappel dans les cartes (c.f. exercice précédent point (d)). Pour reprendre les notations du point (d) de l'exercice précédent, la forme $ydx \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ s'écrit $\alpha_p = a(p)dx$, où $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par $a(p) = a(x, y, z) = y$. Donc son rappel par F est donné par

$$F^*(ydx) = (y \circ F)dF^1 = v\left(\frac{\partial F^1}{\partial u}du + \frac{\partial F^1}{\partial v}dv\right) = v(1 \cdot du + 0 \cdot dv) = vdu.$$

En procédant de la même manière pour les autres 1-formes, on trouve

$$F^*(dz) = \frac{\partial F^3}{\partial u}du + \frac{\partial F^3}{\partial v}dv = 2udu - 2vdv$$

$$F^*(xdy) = u\left(\frac{\partial F^2}{\partial u}du + \frac{\partial F^2}{\partial v}dv\right) = udv$$

Donc

$$F^*\omega = vdu \wedge (2udu - 2vdv) + udv \wedge (2udu - 2vdv) = -2(u^2+v^2)du \wedge dv \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).$$

Exercice 12.5. Notons par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes usuelles de $\mathbb{R}^3$ et (v, w) celles de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction lisse définie par $\varphi(x, y, z) = (x + z, xy)$ et soient $\alpha = e^w dv + vdw$ et $\beta = v\, dv \wedge dw$ deux formes sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les formes suivantes.

$$\alpha \wedge \beta, \quad \varphi^*(\alpha), \quad \varphi^*(\beta) \quad \text{et} \quad \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

Solution 12.5. (a) Since $\Omega^3(\mathbb{R}^2)$ is just the zero form, whatever α and β are, $\alpha \wedge \beta = 0$.
(b) We can either use the definition of $\varphi^*(\alpha)$ to compute the components of this 1-form, or the property that, in local coordinates,

$$\varphi^*(\alpha_I dy^I) = (\alpha_I \circ \varphi)d(y^I \circ \varphi)\,.$$

If we want to use the definition, consider that a basis for $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ is given by dx, dy, dz and

$$\gamma = \gamma_i dx^i \quad \Longrightarrow \quad \gamma_i = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Following a standard convention, we denote for convenience $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$. Thus we have

$$\varphi^*(\alpha)(\partial_x) = \alpha(d\varphi(\partial_x)) = \alpha(\partial_v + y\partial_w) = e^w + yv = e^{xy} + (x+z)y\,,$$
$$\varphi^*(\alpha)(\partial_y) = \alpha(d\varphi(\partial_y)) = \alpha(x\partial_w) = xv = (x+z)x\,,$$
$$\varphi^*(\alpha)(\partial_z) = \alpha(d\varphi(\partial_z)) = \alpha(\partial_v) = e^w = e^{xy}\,.$$

Thus we obtain

$$\varphi^*\alpha = (e^{xy} + (x+z)y)\, dx + (x+z)xdy + e^{xy}dz\,.$$

(c) To compute $\varphi^*\beta$ we use the other (perhaps more direct) method. It uses the following important property of the pull-back:

$$\varphi^*(f(x)dx^1 \wedge dx^k) = (f \circ \varphi)d(x^1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(x^k \circ \varphi)\,.$$

Thus we have

$$\varphi^*(\beta) = \varphi^*(v\ dv \wedge dw) = v(\varphi)d(v(\varphi)) \wedge d(w(\varphi)) = (x+z)\left[(dx+dz) \wedge (ydx + xdy)\right] =$$
$$= (x+y)\left[xdx \wedge dy - ydx \wedge dz - xdy \wedge dz\right]\,.$$

(d) The property $\varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta) = \varphi^*(\alpha \wedge \beta)$ implies that this is a null form.

Exercice 12.6. On introduit pour cet exercice la définition de différentielle extérieure qui généralise la différentielle aux tenseurs. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\omega \in \Omega^k(U)$ une k-forme sur U. Si $(x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées sur U, la k-forme ω s'écrit $\omega = \omega_I dx^I$, où $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, $dx^I = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ et $\omega_I \in C^\infty(U)$. On définit la *différentielle extérieure* $d\omega$ de ω comme étant la $(k+1)$-forme suivante (sur U):

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

On verra plus tard une définition de la différentielle extérieure pour les formes différentielles sur une variété quelconque. Montrer les propriétés suivantes:

(a) d est $\mathbb{R}$-linéaire;

(b) Si $\omega \in \Omega^k(U)$ et $\eta \in \Omega^l(U)$, alors $d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;

(c) $d \circ d = 0$;

(d) Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $F : U \to V$ est une application différentiable et ω est une k-forme sur V, alors $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

Solution 12.6. Commençons d'abord par préciser les notations utilisées. On note $I = (i_1, \dots, i_k)$ un multi-indice de longueur k, chaque indice variant entre 1 et n, avec la condition que les indices sont strictement croissants, i.e. $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Cette notation permet de racourcir des expressions du type

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

On utilise une convention de sommation d'Einstein:

$$a_I dx^I = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

De manière générale, il faut être bien conscient que ce sont des conventions et être attentif à leur signification dans des différents contextes.

(a) La $\mathbb{R}$-linéarité est directe puisque le produit extérieur est $\mathbb{R}$-linéaire.

(b) Par linéarité, il suffit de montrer la propriété pour des termes de la forme $\omega = u dx^I$ et $\eta = v dx^J$, avec $u, v \in C^\infty(U)$. Notons qu'il est suffisant de montrer la propriété pour des multi-indices I et J strictement croissant car si I' est un multi-indice quelconque (non forcément strictement croissant), alors soit I' possède des indices répétés auquel cas $d(udx^{I'}) = 0 = du \wedge dx^{I'}$, soit il existe une permutation σ qui "ordonne" les indices de I', c'est-à-dire qui envoie I' sur un multi-indice I strictement croissant et dans ce cas:

$$d(udx^{I'}) = \operatorname{sgn}(\sigma) d(udx^I) = \operatorname{sgn}(\sigma) du \wedge dx^I = du \wedge dx^{I'}.$$

Ainsi on peut supposer sans perte de généralité que ω et η sont de la forme ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d\left(udx^I \wedge vdx^J\right) \\ &= d(uvdx^I \wedge dx^J) \\ &= (vdu + udv) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (vdx^J) + (-1)^k (udx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

car $dv \wedge dx^I = (-1)^k dx^i \wedge dv$ puisque dv est une 1-forme et dx^I est une k-forme.

(c) Grâce au point précédent, il suffit de montrer que $d \circ d$ sur les 0-formes (i.e. les fonctions C^∞). En effet la formule ci-dessus donne

$$dd\omega = d(du \wedge dx^I) = ddu \wedge dx^I - du \wedge ddx^I$$

et dx^I étant un produit extérieur de 1-formes il suffit d'appliquer suffisamment de fois la formule du point précédent pour n'avoir que des doubles différentielles extérieures de 0-formes. Or, si $a \in C^\infty(U)$, on a

$$\begin{aligned} dda &= d\left(\frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i\right) \\ &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0 \end{aligned}$$

(d) On a d'une part

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*\left(d(udx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})\right) = F^*\left(du\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\right) \\ &= d(u\circ F)\wedge d(x^{i_1}\circ F)\wedge\ldots\wedge d(x^{i_k}\circ F). \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} d(F^*(\omega)) &= d\left(F^*(udx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})\right) = d\left((u\circ F)d(x^{i_1}\circ F)\wedge\ldots\wedge d(x^{i_k}\circ F)\right) \\ &= d(u\circ F)\wedge d(x^{i_1}\circ F)\wedge\ldots\wedge d(x^{i_k}\circ F), \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Exercice 12.7. Considérons les formes différentielles suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = xdx - ydy\,,\quad \beta = zdx\wedge dy + xdy\wedge dz\,,\quad \gamma = e^{2xy}dz\,.$$

Calculer $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et $\alpha\wedge\beta$ et $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$.

Solution 12.7. Par calcul direct

$$\begin{aligned} &d\alpha = dx\wedge dx - dy\wedge dy = 0 \\ &d\beta = dz\wedge dx\wedge dy + dx\wedge dy\wedge dz = 2dx\wedge dy\wedge dz \\ &d\gamma = e^{2xy}(dx+dy)\wedge dz = e^{2xy}\left(dx\wedge dz + dy\wedge dz\right) \\ &\alpha\wedge\beta = xzdx\wedge dx\wedge dy + x^2dx\wedge dy\wedge dz - yzdy\wedge dx\wedge dz - xydy\wedge dy\wedge dz = x^2dx\wedge dy\wedge dz\,. \end{aligned}$$

Comme $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma\in\Omega^4(\mathbb{R}^3)$, ce produit doit être nul (car $\Omega^k(M)=\{0\}$ si $k>\dim M$).