Exercice 13.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Dans les notations classiques, l'ensemble des champs de vecteurs sur U s'écrit

$$\Gamma(U) = \{F = Ae_1 + Be_2 + Ce_3 \mid A, B, C \in C^\infty(U)\}.$$

Trouver des isomorphismes $\alpha_1 : \Gamma(U) \to \Omega^1(U)$ et $\alpha_2 : \Gamma(U) \to \Omega^2(U)$ ainsi que $\alpha_3 : C^\infty(U) \to \Omega^3(U)$ de sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \Gamma(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \Gamma(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\alpha_2"] & C^\infty(U) \arrow[d, "\alpha_3"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

En déduire une preuve des faits suivants: $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} \equiv 0$ et $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} \equiv 0$. La deuxième ligne du diagramme ci-dessus s'appelle le *complexe de De Rham* de U.

Solution 13.1. Rappelons que si $f \in C^\infty(U)$ et $F \in \Gamma(U)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3 \in \Gamma(U), \\
\mathrm{rot}(F) &= \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y}\right) e_3 \in \Gamma(U), \\
\mathrm{div}(F) &= \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \in C^\infty(U).
\end{aligned}$$

Pour le premier isomorphisme, on pose simplement $\alpha_1(e_1) = dx$, $\alpha_1(e_2) = dy$ et $\alpha_1(e_3) = dz$ et on étend par linéarité. Pour le deuxième, on pose

$$\alpha_2(e_1) = dy \wedge dz, \quad \alpha_2(e_2) = -dx \wedge dz, \quad \alpha_2(e_3) = dx \wedge dy.$$

et on étend aussi par linéarité. Pour α_3, on définit $\alpha_3(f) = f dx \wedge dy \wedge dz$. Il faut maintenant voir que les trois diagrammes commutent. Commençons par déterminer la forme générale de $d\omega$ lorsque ω est respectivement une 0,1 et 2-forme sur U.

(i) si $\omega \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, alors par définition

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz;$$

(ii) si $\omega = Adx + Bdy + Cdz \in \Omega^1(U)$, alors

$$\begin{aligned}
d\omega &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy;
\end{aligned}$$

(iii) si $\omega = Adx \wedge dy + Bdx \wedge dz + Cdy \wedge dz \in \Omega^2(U)$, alors

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dx \wedge dy + dB \wedge dx \wedge dz + dC \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial B}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les compositions d'applications du diagramme.

(1) Pour le premier diagramme, on a si $f \in C^\infty(U)$

$$(\alpha_1 \circ \mathrm{grad})(f) = \alpha_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3 \right) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df = (d \circ \mathrm{id})(f).$$

(2) Pour le deuxième diagramme, on a si $F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3 \in \Gamma(U)$, d'une part

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \circ \mathrm{rot})(F) &= \alpha_2 \left(\left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) e_3 \right) \\ &= \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

et d'autre part grâce au calcul effectué plus haut on a

$$\begin{aligned} (d \circ \alpha_1)(F) &= d\left(F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz \right) \\ &= \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

d'où $\alpha_2 \circ \mathrm{rot} = d \circ \alpha_1$.

(3) Pour le troisième diagramme, on a si $F = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3 \in \Gamma(U)$, d'une part

$$\begin{aligned} (\alpha_3 \circ \mathrm{div})(F) &= \alpha_3 \left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (d \circ \alpha_2)(F) &= d\left(F^1 dy \wedge dz - F^2 dx \wedge dz + F^3 dx \wedge dy \right) \\ &= dF^1 \wedge dy \wedge dz - dF^2 \wedge dx \wedge dz + dF^3 \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial F^1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial F^2}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial F^3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\alpha_3 \circ \mathrm{div} = d \circ \alpha_2$.

Finalement, on déduit les formules d'analyse vectorielle en utilisant la commutativité de ce grand diagramme: on écrit $\mathrm{grad} = \alpha_1^{-1} \circ d \circ \mathrm{id}$, $\mathrm{rot} = \alpha_2^{-1} \circ d \circ \alpha_1$ et $\mathrm{div} = \alpha_3^{-1} \circ d \circ \alpha_2$ et ainsi comme $d \circ d = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{rot} \circ \mathrm{div} &= \alpha_2^{-1} \circ d \circ \alpha_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ d \circ \mathrm{id} = \alpha_2^{-1} \circ d \circ d \circ \mathrm{id} = 0, \\ \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} &= \alpha_3^{-1} \circ d \circ \alpha_2 \circ \alpha_2^{-1} \circ d \circ \alpha_1 = \alpha_3^{-1} \circ d \circ d \circ \alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 13.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application $(y^1, y^2) = f(x^1, x^2) = (x^1 \cdot x^2, \mathrm{e}^{x^1+x^2})$ et soit $\alpha = y^2 dy^1 - y^1 dy^2$. Calculer les formes différentielles suivantes

$$d\alpha, \quad f^*\alpha, \quad f^*d\alpha, \quad \text{et} \quad df^*\alpha.$$

Constater la naturalité de la différentielle extérieure sur cet exemple, i.e. voir que $f^*d\alpha = df^*\alpha$.

Solution 13.2. On fait les calculs en utilisant la formule suivante (vue au cours): si

$$\alpha_y = a(y)\, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \in \Omega^k(V),$$

alors

$$f^*(\alpha)_x = a(f(x)) \cdot df^{j_1} \wedge \cdots \wedge df^{j_k}.$$

Ainsi

(a) Par définition de la différentielle extérieure

$$d\alpha = d(y^2 dy^1 - y^1 dy^2) = dy^2 \wedge dy^1 - dy^1 \wedge d^y 2 = -2dy^1 \wedge dy^2,$$

(b) On a

$$\begin{aligned} f^*(\alpha) &= (y^2 \circ f)df^1 - (y^1 \circ f)df^2 \\ &= e^{x^1+x^2} df^1 - x^1 x^2 df^2 \\ &= e^{x^1+x^2}(x^2 dx^1 + x^1 dx^2) - x^1 x^2 (e^{x^1+x^2} dx^1 + e^{x^1+x^2} dx^2) \\ &= x^2 e^{x^1+x^2}(1 - x^1)dx^1 + x^1 e^{x^1+x^2}(1 - x^2)dx^2. \end{aligned}$$

(c) En se rappelant que $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ pour $i, j = 1, 2$, on obtient:

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha) &= f^*(-2dy^1 \wedge dy^2) \\ &= -2f^*(dy^1) \wedge f^*(dy^2) \\ &= -2df^1 \wedge df^2 \\ &= -2(x^2 dx^1 + x^1 dx^2) \wedge e^{x^1+x^2}(dx^1 \wedge dx^2) \\ &= 2e^{x^1+x^2}(x^1 - x^2)dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

(d) De façon similaire

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d(x^2 e^{x^1+x^2}(1 - x^1)dx^1 + x^1 e^{x^1+x^2}(1 - x^2)dx^2) \\ &= d(x^2 e^{x^1+x^2}(1 - x^1)dx^1) + d(x^1 e^{x^1+x^2}(1 - x^2)dx^2) \\ &= e^{x^1+x^2}(1 + x^1)(1 - x^2)dx^1 \wedge dx^2 + e^{x^1+x^2}(1 - x^1)(1 + x^2)dx^2 \wedge dx^1 \\ &= 2e^{x^1+x^2}(x^1 - x^2)dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

La naturalité de d est donc bel et bien vérifiée.

Exercice 13.3. Soit $F : M \to N$ une application différentiable entre variétés différentiables. Alors, pour tout k, le pullback $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ commute avec la différentielle extérieure, i.e. pour tout $\omega \in \Omega^k(N)$

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Solution 13.3. Rappelons qu'à l'exercice 12.6, on a montré que $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ si $M = U \subset \mathbb{R}^n$, $N = V \subset \mathbb{R}^m$, $F : U \to V$ une application différentiable et $\omega \in \Omega^k(V)$. Il suffit donc de montrer qu'on peut se ramener à ce cas-ci. Si (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes sur M et N respectivement, alors, étant donnée une k-forme ω sur N, on a

$$d\omega = \psi^* d(\psi^{-1*}\omega),$$

qui est bien défini par unicité de la différentielle extérieure. On a donc sur $U \cap F^{-1}(V)$

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*\psi^* d(\psi^{-1*}\omega) \\ &= \varphi^* \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* d(\psi^{-1*}\omega) \\ &= \varphi^* d((\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* \psi^{-1*}\omega) \\ &= \varphi^* d(\varphi^{-1*} F^*\omega) \\ &= d(F^*\omega). \end{aligned}$$

On a donc utilisé les faits que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ et $\psi^{-1*}\omega \in \Omega^k(\psi(V))$ et que donc on peut appliquer l'exercice 12.6.

Exercice 13.4. On dit qu'une k-forme différentielle $\omega \in \Omega^k(M)$ est *fermée* si $d\omega = 0$. On dit qu'elle est *exacte* s'il existe $\theta \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $d\theta = \omega$. On dit alors que θ est une *primitive* ou un *potentiel* de ω. On note usuellement $Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega \text{ est fermée}\}$ et $B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega \text{ est exacte}\}$.

(a) Montrer que $B^k(M) \subset Z^k(M)$, i.e. montrer que toute forme exacte est fermée.

(b) Montrer que si α et β sont fermées, alors $\alpha \wedge \beta$ aussi.

(c) Enfin, montrer que si α est exacte et β est fermée, alors $\alpha \wedge \beta$ est exacte.

Solution 13.4. (a) Evident, car $d(d\alpha) = 0$.

(b) On calcule $d(\alpha \wedge \beta)$. Si α est une k-forme:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta = 0$$

(c) Evident avec la formule précédente.

Exercice 13.5. Soit $\omega \in \Omega^1(M)$, et $f \in C^\infty(M)$ telle que $f(x) \neq 0$ quel que soit $x \in M$. Supposons que $d(f \cdot \omega) = 0$. Montrer qu'alors $\omega \wedge d\omega = 0$.

Solution 13.5. On a $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f\omega = 0$. Ainsi:

$$\omega \wedge d\omega = \omega \wedge \left(\frac{\omega \wedge df}{f}\right) = 0.$$

Exercice 13.6. Soit α la forme suivante, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Prouver que

(a) α est fermée.

(b) $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ est une primitive de α sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ (α est donc exacte sur cet ensemble).

On peut montrer que la forme α n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (il s'agit donc d'un exemple de forme fermée non exacte).

Solution 13.6. (a) On a

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx\right) \\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx \wedge dy - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \wedge dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et donc α est fermée.

(b) Il faut montrer que $d\varphi = \alpha$ sur l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Or sur ouvert, on a

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)dy \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}dy \\ &= -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Exercice 13.7. Soient M une variété différentiable, $\omega \in \Omega^1(M)$ une 1-forme et $X, Y \in \Gamma(M)$ deux champs de vecteurs. Montrer que

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

On obtient ainsi une formule *invariante* pour la différentielle extérieure, i.e. une formule qui ne dépend d'aucun système de cartes sur M.

Facultatif: Montrer que plus généralement, si $\omega \in \Omega^k(M)$ et $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \Gamma(M)$, alors

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) = &\sum_{1\le i\le k+1}(-1)^{i-1}X_i\left(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1})\right) \\ &+ \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}\right) \end{aligned}$$

où le chapeau indique que l'on omet l'argument en question.

Solution 13.7. Comme d'habitude on utilise la linéarité pour se contenter de montrer le résultat pour une 1-forme du type $\omega = adx$, avec $a \in C^\infty(M)$. Alors d'une part

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= d(adx)(X,Y) \\ &= da \wedge dx(X,Y) \\ &= da(X)dx(Y) - da(Y)dx(X) \\ &= XaYx - YaXx \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) &= X(adx(Y)) - Y(adx(X)) - adx([X,Y]) \\ &= X(aYx) - Y(aXx) - a[X,Y]x \\ &= (XaYx + aXYx) - (YaXx + aYXx) - (aXYx - aYXx) \\ &= XaYx - YaXx. \end{aligned}$$

Pour les plus motivés, la preuve de la formule généralisée se trouve par exemple dans *Introduction to smooth Manifolds* de J.M. Lee, pp.$370-371$ (seconde édition).